Фундаментальные Группы Гомологических Сфер

Михаил Корнев

МИАН им. В. А. Стеклова

Семинар ИМ СО РАН "Геометрия, топология и их приложения"
15 декабря 2022 г.

Определение гомологической сферы

Определение

Гомологической сферой называется гладкое замкнутое многообразие Σ^n, такое, что

$$H_*(\Sigma^n;\mathbb{Z}) \cong H_*(\mathbb{S}^n;\mathbb{Z}).$$

Вопрос, M. Kervaire, [27], 1969

Какие группы G реализуются, как фундаментальные группы $\pi_1(\Sigma^n)$ гомологических n-мерных сфер Σ^n?

- Пусть $G = \pi_1(\Sigma^n)$. Из определения гомологической сферы сразу следует, что группа G является конечно представленной и совершенной (т. е. $H_1(G;\mathbb{Z}) = 0$)

$\pi_1(\Sigma^n)$ — суперсовершенные

Определение

Группа G называется *суперсовершенной*, если $H_1(G;\mathbb{Z}) = H_2(G;\mathbb{Z}) = 0$ ($\mathbb{Z}$ — тривиальный G-модуль)

Утверждение (H. Hopf, [18], 1942)

Пусть X — связный CW-комплекс. Тогда имеется точная последовательность групп:

$$\pi_2(X) \xrightarrow{h} H_2(X;\mathbb{Z}) \to H_2(\pi_1(X);\mathbb{Z}) \to 0,$$

где h — гомоморфизм Гуревича, а $\mathbb{Z}$ — тривиальный $\pi_1(X)$-модуль.

Из точности последовательности в утверждении следует, что $\pi_1(\Sigma^n)$ является суперсовершенной

Формула Хопфа

Теорема (Х. Хопф, 1942, [18])

Пусть $G = \langle F \mid R \rangle$ *— конечно представленная группа. Тогда*

$$H_2(G; \mathbb{Z}) \cong \frac{R \cap [F, F]}{[F, R]}.$$

Следствие

$$H_2(G; \mathbb{Z}) = 0 \Leftrightarrow R \cap [F, F] = [F, R].$$

Теорема Кервера-Новикова

Определение

Конечно определённая группа G называется *реализуемой*, если существует гомологическая сфера Σ^n, такая, что $G \cong \pi_1(\Sigma^n)$

Теорема (M. Kervaire, [27], 1969)

Пусть G — суперсовершенная конечно определённая группа, и $n \geqslant 5$. Тогда существует гладкая гомологическая n-сфера с фундаментальной группой G

Теорема (С. П. Новиков, 1974, [39])

Свойство n-мерного многообразия быть стандартной n-мерной сферой ($n \geqslant 5$) или свойство стягиваемой области в $(n+1)$-мерном евклидовом пространстве с гладкой границей быть $(n+1)$-мерным диском, нераспознаваемы

Вопрос в размерностях 3 и 4

- В настоящее время является открытым

Вопрос, M. Kervaire, [27]

Какие конечно определённые группы реализуются, как фундаментальные группы гомологических 3-сфер? 4-сфер?

Схема доказательства (С. П. Новиков, [39] 1962)

- По представлению группы π образующими и соотношениями построим $n+1$-мерное многообразие с краем:

$$M^{n+1} = \left(\mathbb{D}^{n+1} \bigcup_{g_1,\ldots,g_k} \mathbb{D}^n_j \times \mathbb{D}^1_j \right) \bigcup_{r_1,\ldots,r_\ell} \mathbb{D}^{n-1}_q \times \mathbb{D}^2,$$

где склейка происходит со стандартным сглаживанием по отображениям

$$g_j : \mathbb{D}^n_j \times \partial \mathbb{D}^1_j \to \partial \mathbb{D}^{n+1},$$

$$r_q : \mathbb{D}^{n-1}_q \times \partial \mathbb{D}^2_q \to \partial \left(\mathbb{D}^{n+1} \bigcup_{g_1,\ldots,g_k} \mathbb{D}^n_j \times \mathbb{D}^1_j \right),$$

которые соответствуют образующим и соотношениям группы π

Схема доказательства (продолжение)

- $H_2(\pi) = 0 \Rightarrow$ в $H_2(\partial M)$ все циклы сферические
- Реализуем свободный базис $H_2(\partial M)$ сферами $\mathbb{S}^2_\alpha \times \mathbb{D}^{n-2}_\alpha \subset \partial M$ и сделаем вдоль них хирургию
- Тогда мы убьём вторую гомотопическую группу (здесь существенно, что $n \geqslant 5$) и, следовательно, получим нулевые вторые гомологии для многообразия ∂M
- По построению и исходя из клеточных гомологий, у M не могут быть гомологии в остальных размерностях (кроме размерности n). Стало быть, мы имеем гомологическую сферу ∂M

Сфера Пуанкаре и $2I$

Определение

Копредставление группы G называется *сбалансированным*, если в нём число образующих равно числу соотношений

- Как известно (например, [27], [23]), любая фундаментальная группа 3-многообразия имеет сбалансированное копредставление
- Если конечная группа G является фундаментальной группой гомологической 3-сферы Σ^3, то [27] G либо тривиальна, либо изоморфна бинарной группе икосаэдра $2I = \langle x, y | x^2 = y^3 = (xy)^5 \rangle$

Сфера Пуанкаре и $2I$

- Группа $2I$ имеет точное представление в кватернионах и потому имеется действие $2I \curvearrowright \mathbb{S}^3$, фактором по которому является *сфера Пуанкаре*
- Универсальным пространством бинарной группы икосаэдра является бесконечномерная сфера $\mathbb{S}^\infty = \operatorname{colim} \mathbb{S}^{4n-1}$ со свободным действием левыми сдвигами группы $G \cong 2I$

Центральные расширения

Определение

Центральным расширением (X, ϕ) группы G посредством группы H и гомоморфизма $\phi : X \to G$ называется такая пара (X, ϕ), что имеет место короткая точная последовательность

$$1 \to H \to X \to G \to 1,$$

для которой $\ker \phi = H \subset \mathcal{Z}(X)$

Универсальные центральные расширения

Определение

Универсальным центральным расширением (U, ϕ) группы G называется центральное расширение

$$1 \to H \to U \to G \to 1,$$

т. ч. для любого другого центрального расширения (X, ψ) группы G найдётся *единственный* гомоморфизм $U \to X$, замыкающий данную диаграмму до коммутативной

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, dashed] \arrow[d, "\phi"'] & X \arrow[dl, "\psi"] \\ G & \end{tikzcd}$$

Универсальные центральные расширения

Определение

Ядро H универсального расширения называется *мультипликатором Шура группы* G

Теорема ([37])

Центральное расширение (U, ϕ) *группы* G *является универсальным тогда и только тогда, когда группа* U *— совершенная и любое центральное расширение группы* U *расщепляется*

Универсальные центральные расширения

Следствие ([37])

Универсальное центральное расширение группы G существует тогда и только тогда, когда G совершенна

Следствие

Ядро универсального центрального расширения канонически изоморфно $H_2(G;\mathbb{Z})$, где $\mathbb{Z}$ — тривиальный G-модуль, т. е. имеется короткая точная последовательность

$$0 \to H_2(G;\mathbb{Z}) \to U \to G \to 0$$

Следствие

Универсальное центральное расширение U группы G является суперсовершенной группой

Доказательство.

Пусть имеется универсальное центральное расширение группы U:

$$1 \to H_2(U) \to \widetilde{U} \underset{r}{\overset{s}{\leftrightarrows}} U \to 1 \qquad (\bigstar)$$

Из того, что $U \to G$ является универсальным центральным расширением по универсальному свойству следует, что имеется сечение $s : U \to \widetilde{U}$. Значит, расширение $(\bigstar)$ расщепляется. Но расщепляющиеся расширения параметризуются [8] элементами группы $H^1(U, H_2(U)) \cong \operatorname{Hom}(H_1(U), H_2(U)) = 0$. Таким образом, расширение $(\bigstar)$ единственно, $\widetilde{U} \cong U$ и $H_2(U) = 0$. □

Универсальные центральные расширения

- Приведём здесь явную конструкцию [37] универсального центрального расширения $U \to G$ совершенной группы $G = \langle F \mid R \rangle$:

$$(F/[R, F])' = [F, F]/[R, F] \to G$$

Сфера Пуанкаре и $2I$

- Бинарная группа икосаэдра является [37] универсальным центральным расширением группы икосаэдра A_5:

$$1 \to \{\pm 1\} \to 2I \cong \mathrm{SL}(2, \mathbb{F}_5) \to A_5 \cong \mathrm{PSL}(2, \mathbb{F}_5) \to 1$$

- В частности, $H_2(A_5; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

Сферы Брискорна

Определение

Сферой Брискорна $\Sigma(p, q, r)$ называется 3-мерное многообразие, которое получается при пересечении малой сферы с центром в 0 и множества нулей многочлена $x^p + y^q + z^r = 0$ для натуральных p, q и r в $\mathbb{C}^3$

Предложение (J. Milnor, [29], 1975)

Если p, q и r попарно взаимно простые, то $\Sigma(p, q, r)$ — гомологическая 3-сфера.

Сферы Брискорна

Теорема (J. Milnor, [29], 1975)

Если $1/p + 1/q + 1/r \neq 1$, *то* $\pi_1(\Sigma(p, q, r))$ *изоморфна центральному расширению группы von Dyck*

$$D(p, q, r) = \langle a,\ b,\ c \mid a^p = b^q = c^r = abc = 1\rangle.$$

Это расширение имеет копредставление

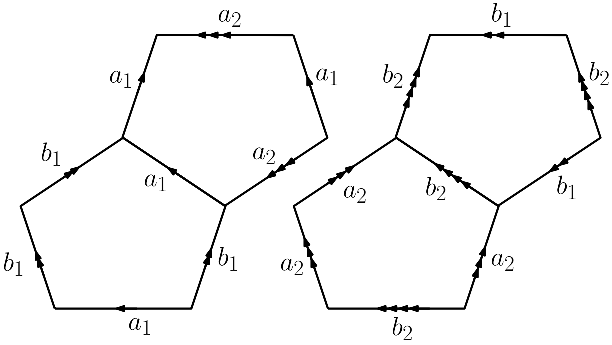
$$\pi_1(\Sigma(p, q, r)) = \langle a,\ b,\ c \mid a^p = b^q = c^r = abc\rangle$$

- Из теоремы Милнора следует, что сферой Брискорна с нетривиальной конечной фундаментальной группой может являться только сфера Пуанкаре $\Sigma(2, 3, 5)$

Нереализуемые группы в размерности 3

- Не всякая сбалансированная копредставленная группа может быть фундаментальной группой гомологической 3-сферы
- Самый простой пример – группа Хигмана [20]

$$\mathrm{Hig}_4 = \langle a, b, c, d \mid a^{-1}ba = b^2, b^{-1}cb = c^2$$
$$c^{-1}dc = d^2, d^{-1}ad = a^2\rangle$$



Нереализуемые группы в размерности 3

- Можно также определить группы Hig_n для всех $n \geqslant 4$

Определение

$$\mathrm{Hig}_n := \langle x_i, i \in \mathbb{Z}/n \mid [x_{i-1}, x_i] = x_i \rangle \,,$$

где $[x, y] = xyx^{-1}y^{-1}$, $n \geqslant 4$

Определение

Ацикличной называется такая группа G, что $H_*(G) \cong H_*(\mathrm{pt})$

- Фундаментальная группа любого 3-многообразия не может быть ацикличной согласно работе Berrick [6]
- Группы Hig_n нереализуема в размерности 3, поскольку являются *ацикличными* [6]

Θ^n

Определение

Гомотопической n-сферой называется многообразие, гомотопически эквивалентное стандартной n-сфере

Определение ([25], 1963)

Группой кобордизмов гомотопических сфер Θ^n называется группа классов гомотопических сфер с точностью до диффеоморфизма по отношению h-кобордантности: $M_0 \sim M_1$, если существует W, т. ч. $\partial W = -M_0 \sqcup M_1$ и вложения M_i индуцируют гомотопические эквивалентности

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
$\lvert\Theta^n\rvert$	1	1	1	1	1	1	28	2	8	6	992	1	3	2	16256	2	16	16

$28 = 2^2 \cdot 7$, $992 = 2^5 \cdot 31$, $16256 = 2^7 \cdot 127$

$\Theta^n_{\mathbb{Z}}$

- Изучение гомологических сфер тесно связано с проблемами гладких структур на многообразиях
- Позднее, в диссертации ([17], 1970) González-Acuña определил n-мерные группы кобордизмов гомологических сфер $\Theta^n_{\mathbb{Z}}$:

Определение

$\Theta^n_{\mathbb{Z}}$ называется группой *n-мерных кобордизмов гомологических сфер*. Она состоит из классов эквивалентности гомологических n-сфер с точностью до диффеоморфизма по следующему отношению кобордантности: $M_0 \sim M_1$, если существует $(n+1)$-многообразие W, т. ч. $\partial W = -M_0 \sqcup M_1$ и включения M_i индуцируют изоморфизмы гомологий с W

Теорема (M. Kervaire и J. Milnor, [25], 1963)

Группы Θ^n — конечные для всех n

Следствие

Множество классов диффеоморфизма $M\sharp N^n$ конечно, где N^n — гомотопическая сфера

Сравнение Θ^n и $\Theta^n_{\mathbb{Z}}$

- Оказалось, что группы Θ^n и $\Theta^n_{\mathbb{Z}}$ тесно связаны между собой:

Теорема (F. González-Acuña, [17], 1970)

Если $n \neq 3$, то $\Theta^n \cong \Theta^n_{\mathbb{Z}}$. В частности, группы $\Theta^n_{\mathbb{Z}}$ конечны для всех $n \neq 3$

Инвариант Рохлина

- Имеется [2] гомоморфизм $\mu : \Theta^3_{\mathbb{Z}} \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
- Он задан формулой $\mu(\Sigma^3) = \sigma(W^4)/8 \mod 2$, где $\partial W = M$, где $\sigma(M)$ обозначает сигнатуру многообразия M

Пример

Для стандартной сферы $\mu(\mathbb{S}^3) = 0$, для сферы Пуанкаре $\mu(\Sigma(2,3,5)) = 1$

Утверждение

Группа $\Theta^3_{\mathbb{Z}}$ *содержит бесконечную циклическую группу, натянутую на* $\Sigma(2,3,5)$

Доказательство.

Если это не так, то $m\Sigma \sim \mathbb{S}^3$. Тогда есть гомологический диск W' с границей $m\Sigma$. Гладкое многообразие $mW \sqcup_{m\Sigma} W'$, где $\partial W = \Sigma$, имеет $\oplus_m E_8$ формой пересечений — противоречие с теорией Дональдсона $\square$

- На самом деле, в группе $\Theta^3_{\mathbb{Z}}$ выделяется ([13], 2002) прямое слагаемое $\langle[\Sigma(2,3,5)]\rangle$

Структура группы $\Theta^3_{\mathbb{Z}}$

Теорема (I. Dai, и др., [11], 2018)

Группа $\Theta^3_{\mathbb{Z}}$ *содержит слагаемое* $\mathbb{Z}^\infty$, *порождённое сферами Брискорна* $\{\Sigma(2n+1, 4n+1, 4n+3)\}_{n=1}^{\infty}$

Вопрос, [33]

Верно ли, что $\Theta^3_{\mathbb{Z}} \cong \mathbb{Z}^\infty$?

Структура группы $\Theta^3_{\mathbb{Z}}$

- Какие образующие бывают у $\Theta^3_{\mathbb{Z}}$?
- Первые результаты в этом направлении принадлежат Freedman и Taylor

Теорема (M. Freedman, Taylor, [12], 1977)

Группа $\Theta^3_{\mathbb{Z}}$ порождается гомологическими сферами, которые являются границами 4-многообразий, имеющие гомологии $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$

Структура группы $\Theta^3_{\mathbb{Z}}$

Определение

Неприводимым 3-многообразием называется гладкое 3-многообразие, в котором любая вложенная 2-сфера ограничивает 3-диск

- Примеры: $\mathbb{S}^3$, линзовые пространства $L(p,q)$ с $p \neq 0$
- Как известно, 3-многообразия склеиваются из неприводимых 3-многообразий

Теорема (C. Livingston, [26], 1981)

Группа $\Theta^3_{\mathbb{Z}}$ порождается неприводимыми гомологическими 3-сферами

Структура группы $\Theta^3_{\mathbb{Z}}$

Теорема (R. Myers, [31], 1983)

Группа $\Theta^3_{\mathbb{Z}}$ порождается гиперболическими гомологическими 3-сферами

Вопрос

Какие группы реализуются, как фундаментальные группы гиперболических гомологических сфер?

- Этот вопрос тесно связан с известной проблемой Ф. Клейна [40] об описании всех связных компактных римановых многообразий постоянной отрицательной кривизны

Структура группы $\Theta^3_{\mathbb{Z}}$

- Гомологические сферы, которые являются расслоениями Зейферта над $\mathbb{S}^2$, не порождают $\Theta^3_{\mathbb{Z}}$:

Теорема (K. Frøyshov и др., [14], 2016)

Существует бесконечное семейство гомологических 3-сфер, которые гомотопически не кобордантны никакой зейфертовой расслоенной гомологической сфере

Структура группы $\Theta^3_{\mathbb{Z}}$

Теорема (K. Hendricks и др., [19], 2021)

Пусть Θ^3_{SF} — подгруппа $\Theta^3_{\mathbb{Z}}$, порождённая гомологическими сферами Зейферта. Тогда факторгруппа $\Theta^3_{\mathbb{Z}}/\Theta^3_{SF^3}$ имеет $\mathbb{Z}^\infty$ в качестве подгруппы

Вопрос, [33]

Выделяется ли $\mathbb{Z}^\infty$ прямым слагаемым?

Хирургии Дена вдоль узлов

- Гомологические 3-сферы можно получать при помощи *p/q-хирургий Дена* (1938) [33, 16]
- $\mathbb{S}^3_{p/q}(K) = (\mathbb{S}^3 \setminus \mathrm{Int}\, \nu(K)) \cup_\phi (\mathbb{D}^2 \times \mathbb{S}^1)\,,\ \phi(\partial\mathbb{D}^2 \times \{*\}) = p\mu + q\lambda$
- $H_1(\mathbb{S}^3_{p/q}(K)) = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, поэтому $\mathbb{S}^3_{1/n}$ — гомологическая 3-сфера

Пример

Ден показал, что сфера Пуанкаре получается (-1)-хирургией вдоль левого трилистника

- Хирургию вдоль оснащённых узлов исследовали Lickorish, Wallace и Kirby

Зейфертовы расслоенные пространства

- Seifert предложил (1933) следующую конструкцию [15, 16]
- Зейфертово расслоенное пространство с базой-орбифолдом $\mathbb{S}^2$ — это 3-многообразие без края $M\,(\mathbb{S}^2; e, (a_1, b_1), \dots, (a_n, b_n))$, НОД$(a_i, b_i) = 1$
- Возьмём пространство $\mathbb{S}^1$-расслоения над $\mathbb{S}^2 \setminus \{\mathrm{pt}_1, \dots, \mathrm{pt}_n\}$ с числом Эйлера e и вклеим в него (a_i/b_i)-оснащённые торы
- Результат будет гомологической сферой $\Leftrightarrow$

$$a_1 \dots a_n \left(-e + \sum_{i=1}^{n} \frac{b_i}{a_i}\right) = \pm 1$$

Зейфертовы расслоенные пространства

- Зейфертовы расслоенные пространства можно [15] задать уравнениями в $\mathbb{C}^n$
- Рассмотрим $V(a_1, \ldots, a_n) = \{b_{i1}z_1^{a_1} + \ldots + b_{in}z^{a_n} = 0,\ i = 1, \ldots, n-2\}$, $\operatorname{rk} B = n - 2$
- Тогда $\Sigma(a_1, \ldots, a_n) = V(a_1, \ldots, a_n) \cap \mathbb{S}^{2n-1}$ — многообразие размерности $2n - 1 - 2(n-2) = 3$
- $\Sigma(a_1, \ldots, a_n)$ — гомологическая 3-сфера $\Leftrightarrow$ $\{a_i\}$ попарно взаимно просты
- Сферы Брискорна – частный случай зейфертовых гомологических 3-сфер

Пламбинг вдоль диаграмм

- Гомологические 3-сферы можно получать пламбингом по взвешенным деревьям. У взвешенного дерева рядом с вершиной по построению написано целое число
- Каждой вершине v с весом $w(v)$ соответствует пространство $\mathbb{D}^2$-расслоения над $\mathbb{S}^2$ с классом Эйлера $w(v)$
- Пламбинг даёт 4-мерное топологическое многообразие с краем — гомологической 3-сферой в случае, если матрица формы пересечений унимодулярна

Другие способы работы с Σ^3

- Циклические накрытия над $\mathbb{S}^3$, разветвлённые над узлом $K \subset \mathbb{S}^3$
- Применение JSJ (Jaco, Shalen и Johannson) разложения

Примеры Σ^4

- Из Σ^3 можно построить Σ^4 следующим образом [34]
- Пусть связная сумма $\Sigma^3 \sharp \Sigma^3$ ограничивает некоторое 4-многообразие V^4 с краем
- Возьмем дубль многообразия V^4 и получим гомологическую 4-сферу с фундаментальной группой $\pi = \pi_1(\Sigma^3)$
- Значит, все фундаментальные группы Σ^3 реализуются в размерности 4. Другой способ это увидеть содержится в статье Кервера [27] — см. ниже
- Но не всякая $\pi_1(\Sigma^4)$ реализуется в размерности 3 (например, группы Хигмана), как мы видели

Σ^4 с конечной фундаментальной группой

- В отличие от гомологической 3-сферы, гомологическую 4-сферу с конечной фундаментальной группой нельзя представить в виде фактора $\mathbb{S}^4/G$ стандартной сферы по свободному действию конечной группы G
- Это означает, что вопрос ниже не сводится к изучению свободных действий конечных групп на сферах

Вопрос, [24]

Существует ли Σ^4 с конечной нетривиальной фундаментальной группой, отличной от $2I$?

Результат Кервера для размерности 4

Теорема (M. Kervaire, [27], 1969)

Сбалансированная конечно определённая суперсовершенная группа реализуется как $\pi_1(\Sigma^4)$

Результат Кервера для размерности 4

- В той же работе [27] Кервер высказал предположение о том, что всякая реализуемая группа в размерности 4 имеет сбалансированное копредставление
- Однако это оказалось неверно:

Определение

Дефектом конечно представленной группы π с g образующими и r соотношениями называется максимум разности $g - r$ по всем предствлениям группы π (с конечным g)

Теорема (C. Livingston, 2003, [9])

Для любого $N > 0$ существует гомологическая 4-сфера с дефектом, меньшим $-N$

Σ^4 с данной фундаментальной группой

- B называется *3-косвязным*, если $\pi_n(B) = 0$ при $n \geqslant 3$
- Пространству X можно сопоставить тройку $[\pi_1(X), \pi_2(X), k(X))]$, где $k(X)$ — гомотопический класс отображения $p : X_2 \to X_1$ между 1-м и 2-м этажами башни Постникова. Элементы k биективно соответствуют элементам группы $H^3(\pi_1(X), \pi_2(X))$
- На множестве троек $\{[\pi_1, \pi_2, k]\}$ можно ввести отношение эквивалентности, при котором $[\pi_1, \pi_2, k] \sim [\widetilde{\pi}_1, \widetilde{\pi}_2, k] \Leftrightarrow$ $\pi_1 \cong \widetilde{\pi}_1$ и $\pi_2 \cong \widetilde{\pi}_2$ как π_1-модули
- Здесь $\mathscr{J}_4(B)$ — множество гомотопических классов 3-эквивалентностей $f : X \to B$ для ориентируемых связных 4-мерных комплексов Пуанкаре X
- И $\Gamma(\pi_2)$ — это левый π_1-модуль целочисленных форм на $\pi_2(B) \cong H^2(\widetilde{B})$

Σ^4 с данной фундаментальной группой

- Из результатов Hambleton и Kreck следует, что имеется лишь конечное число замкнутых ориентируемых 4-многообразий с данными π_1 и эйлеровой характеристикой

Теорема (I. Hambleton, M. Kreck, 1988, [21])

Пусть $B = B(\pi_1, \pi_2, k)$ — 3-косвязный клеточный комплекс с фундаментальной группой π_1 и $\mathscr{J}_4(B) \neq \varnothing$.

1. *Если $\pi_1(B)$ конечна, то существует точная последовательность*

$$0 \to \operatorname{Tors}\left(\Gamma\left(\pi_2 B\right) \otimes_\Lambda \mathbb{Z}\right) \to \mathscr{J}_4(B) \to \underbrace{H_4(\widetilde{B}, B)}_{\cong \mathbb{Z}/|\pi_1|\mathbb{Z}} \times \{\mathbb{Z}\text{-ф. на } \pi_2(B)\}$$

2. *Если $\pi_1(B)$ бесконечна и $H_2(B, \mathbb{Q}) \neq \{0\}$, то отображение $\mathscr{J}_4(B) \to H_4(B; \mathbb{Z})$, отправляющее (X, f) в $f_\star[X]$ инъективно.*

- При помощи алгебраической K-теории получается следующий результат:

Теорема ([37])

При $n \geqslant 3$ группа

$$\mathrm{SL}(n, \mathbb{F}_q) \text{ — суперсовершенная,}$$

за исключением трёх случаев:

$$\mathrm{SL}(3, \mathbb{F}_2),\ \mathrm{SL}(4, \mathbb{F}_2),\ \mathrm{SL}(3, \mathbb{F}_4)$$

- При помощи групп лиева типа из предыдущей теоремы Hausmann и Veinberg в [24] конструируют примеры нереализуемых групп
- Рассмотрим
$$G_0 = (\mathbb{F}_p^n)^k \rtimes \mathrm{SL}(n, \mathbb{F}_p)$$
со стандартным действием $\mathrm{SL}(n, \mathbb{F}_p) \curvearrowright (\mathbb{F}_p^n)^k$
- Группа G_0 не обязательно будет суперсовершенной, однако она является совершенной, что означает существование универсального центрального расширения
$$1 \to H_2(G_0) \to G \to G_0 \to 1,$$
и здесь оказывается, что G уже будет суперсовершенной

- Далее, Hausmann и Veinberg находят подгруппу H конечного индекса, являющуюся ядром сквозного гомоморфизма $G \to G_0 \to \mathrm{SL}(n, \mathbb{F}_p)$. Этот индекс не зависит от k, поскольку он равен порядку группы $\mathrm{SL}(n, \mathbb{F}_p)$
- И при больших k приходят к выполнению неравенства из утверждения ниже, что и показывает нереализуемость группы G фундаментальной группой гомологической 4-сферы:

Утверждение ([24])

Пусть группа G содержит подгруппу H конечного индекса n такую, что

$$2 + b_2(H) - 2b_1(H) > 2n,$$

где b_i — числа Бетти по отношению к какому-либо полю коэффициентов. Тогда G не реализуется как фундаментальная группа 4-мерной гомологической сферы

Рациональные гомологические сферы

- Можно задаться вопросом реализуемости для рациональных гомологических сфер
- Hasmann и Veinberg в ([24], 1985) сопоставили группе G число $q(G)$, равное инфимуму эйлеровой характеристики замкнутого ориентируемого 4-многообразия с фундаментальной группой G. Они нашли неулучшаемые верхнюю и нижнюю оценки для $q(G)$ по заданию группы G образующими и соотношениями
- Hambleton и Adem обобщили в ([1], 2021) определение $q(G)$, теперь уже беря инфимум не по 4-мерным, а по $2n$-мерным замкнутым ориентированным многообразиям, которые имеют $(n-1)$-связное универсальное накрытие

- Этот результат может дать некоторую информацию про рациональные гомологические 4-сферы [1]. *Дело в том, что конечная фундаментальная группа G является фундаментальной группой некоторой рациональной гомологической 4-сферы тогда и только тогда, когда* $q(G) = 2$
- Имеются результаты других авторов (см. список литературы к статье [1]) о том, при каких условиях на конечную абелеву группу G получается $q(G) = 2$. Так, например, результат Teichner ([32], 1992) даёт критерий: конечная абелева группа G реализуется рациональной гомологической 4-сферой тогда и только тогда, когда минимальное число порождающих группы G не больше 3.
- Также в работе [1] приведено несколько классов конечных групп, которые не могут быть фундаментальными группами рациональных гомологических 4-сфер

Распознаваемость стандартной сферы

- С. И. Адян доказал ([38], 1957), что проблема распознавания тривиальной группы, заданной образующими и соотношениями, не разрешима
- Используя это, А. А. Марков опубликовал работу ([35], 1958) о неразрешимости проблемы гомеоморфности 4-многообразий. В ней имеется результат о том, что для всякого $n > 3$ существует n-мерное многообразие, для которого проблема гомеоморфности неразрешима

Теорема (С. П. Новиков, 1974, [39])

Свойство n-мерного многообразия быть стандартной n-мерной сферой ($n \geqslant 5$) или свойство стягиваемой области в $(n+1)$-мерном евклидовом пространстве с гладкой границей быть $(n+1)$-мерным диском, нераспознаваемы

Распознаваемость в размерностях 3 и 4

- В размерности 3 существует алгоритм распознавания стандартной сферы

Вопрос

Распознаваема стандартная 4-сфера среди гладких 4-мерных многообразий?

- А. А. Гайфуллин заметил, что проблема распознавания 4-сферы будет алгоритмически неразрешима, если ответ на следующий вопрос будет утвердительным:

Вопрос

Верно ли, что если π — конечно определённая суперсовершенная группа, не имеющая подгрупп конечного индекса, то π реализуется как фундаментальная группа 4-мерной гомологической сферы?

Литература I

[1] Alejandro A. and Hambleton I.
Minimal Euler Characteristics for Even-Dimensional Manifolds with Finite Fundamental Group.
Unpublished, 02 2021.

[2] Rokhlin V. A.
New results in the theory of four-dimensional manifolds.
Doklady Akad. Nauk SSSR (N.S.), 84:221–224, 1952.

[3] Alejandro Adem and R. James Milgram.
Cohomology of Finite Groups.
Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2004.

[4] G. Baumslag, E. Dyer, and A. Heller.
The topology of discrete groups.
Journal of Pure and Applied Algebra, 16(1):1–47, 1980.

Литература II

[5] G. Baumslag, E. Dyer, and C.F. Miller.
On the integral homology of finitely presented groups.
Topology, 22(1):27–46, 1983.

[6] A.J. Berrick.
The acyclic group dichotomy.
Journal of Algebra, 326(1):47–58, 2011.

[7] AJ Berrick and JA Hillman.
Perfect and acyclic subgroups of finitely presentable groups.
Journal of The London Mathematical Society-second Series - J LONDON MATH SOC-SECOND SER, 68, 12 2003.

Литература III

[8] Kenneth S. Brown.
Cohomology of Groups, volume 87 of *Graduate Texts in Mathematics*.
Springer New York, NY, 1982.

[9] Livingston C.
Four-manifolds of large negative deficiency.
Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, 138:107–115, 2005.

[10] Maurice Chiodo and Michael E. Hill.
Preserving torsion orders when embedding into groups with small finite presentations, 2016.

Литература IV

[11] Irving Dai, Jennifer Hom, Matthew Stoffregen, and L. Truong.
An infinite-rank summand of the homology cobordism group.
arXiv: Geometric Topology, 2018.

[12] Michael H. Freedman and Lawrence Taylor.
Lambda-splitting 4-manifolds.
Topology, 16(2):181–184, 1977.

[13] Kim A. Frøyshov.
Equivariant aspects of Yang–Mills Floer theory.
Topology, 41(3):525–552, 2002.

[14] Kim A. Frøyshov.
Mod 2 instanton floer homology.
Unpublished, 2016.

[15] Shintaro Fushida-Hardy.
Homology 3-spheres.

[16] R.V. Gamkrelidze, N. Saveliev, and A. Vassiiev.
Invariants of Homology 3-Spheres.
Encyclopaedia of Mathematical Sciences. Springer Berlin Heidelberg, 2002.

[17] Short González-Acuña, Francisco and Hamish.
On homology spheres.
PhD thesis, Princeton University, 1970.

[18] Hopf H.
Fundamentalgruppe und zweite Bettische Gruppe.
Commentarii Mathematici Helveticiment., 14:257–309, 1942.

[19] Kristen Hendricks, Jennifer Hom, Matthew Stoffregen, and Ian Zemke.
Surgery exact triangles in involutive Heegaard Floer homology.
arXiv: Geometric Topology, 2020.

[20] Graham Higman.
A Finitely Generated Infinite Simple Group.
Journal of The London Mathematical Society-second Series, pages 61–64, 1951.

[21] Hambleton I. and Kreck M.
On the Classification of Topological 4-Manifolds with Finite Fundamental Group.
Math. Ann., 280:85–104, 1988.

Литература VII

[22] Hillman J.
Four-manifolds, geometries and knots.
Geometry and Topology Publications, 2002.

[23] Milnor J.
Groups Which Act on Sn Without Fixed Point.
American Journal of Mathematics, 79(3):623–630, 1957.

[24] Hausmann J.-C. and Weinberger Sh.
Caractéristiques d'euler et groupes fondamentaux des variétés de dimension 4.
Commentarii Mathematici Helvetici, 1985.

[25] Michel A. Kervaire and John W. Milnor.
Groups of Homotopy Spheres: I.
Annals of Mathematics, 77(3):504–537, 1963.

Литература VIII

[26] Charles Livingston.
Homology cobordisms of 3-manifolds, knot concordances, and prime knots.
Pacific Journal of Mathematics, 94(1):193 – 206, 1981.

[27] Kervaire M.
Smooth homology spheres and their fundamental groups.
Transactions of the American Mathematical Society, 144:67–72, 1969.

[28] C. R. F. Maunder.
A Short Proof of a Theorem of Kan and Thurston.
Bulletin of the London Mathematical Society, 13(4):325–327, 07 1981.

[29] John Milnor.
ON THE 3-DIMENSIONAL BRIESKORN MANIFOLDS $M(p, q, r)$, pages 175–226.
Princeton University Press, Princeton, 1975.

[30] Nicolas Monod.
Variations on a theme by Higman, 2016.

[31] Robert Myers.
Homology Cobordisms, Link Concordances, and Hyperbolic 3-Manifolds.
Transactions of the American Mathematical Society, 278(1):271–288, 1983.

Литература X

[32] Teichner P.
Topological four-manifolds with finite fundamental group.
PhD thesis, Johannes-Gutenberg Universitat in Mainz, 1992.

[33] Oğuz Şavk.
A survey of the homology cobordism group, 2022.

[34] user98602.
Answer on the posted question.

[35] Марков А.
Неразрешимость проблемы гомеоморфии.
Докл. АН СССР, 121(2):218–220, 1958.

[36] Гуревич В.; Волмэн Г.
Теория размерности.
Издательство иностранной литературы, 1948.

Литература XI

[37] Милнор Дж.
Введение в алгебраическую K-теорию.
Мир, 1974.

[38] Адян С. И.
Неразрешимость некоторых алгоритмических проблем теории груп.
Тр. ММО, pages 231–298, 1957.

[39] Володин И. А.; Кузнецов В. Е.; Фоменко А. Т.
О проблеме алгоритмического распознавания стандартной трехмерной сферы.
УМН, 29:71–169, 1974.

[40] Веснин А. Ю.
Объемы трехмерных гиперболических многообразий Лебелля.
Матем. заметки, 64(1):17–23, 1998.