

Ациклические группы и пространства

Конференция «Ломоносов»

- В докладе, говоря о группе G , мы будем иметь в виду дискретную группу
- Имеется фундаментальное соответствие $G \mapsto BG$, где BG — классифицирующее пространство группы G

Цель: исследовать это соответствие в контексте ациклических групп и пространств.

Известная конструкция Кана-Тёрстона по фиксированной ациклической группе сопоставляет полиэдральному разбиению пространства X пространство Эйленберга-Маклейна $K(G_X, 1)$, гомологии которого изоморфны гомологиям X

Центральные задачи: 1. Дано полиэдральное разбиение пространства X . Описать копредставление группы G_X .

2. Исследовать связь между комбинаторикой разбиения X и структурой группы G_X .

Определение

Гомологиями дискретной группы G с коэффициентами в G -модуле M называются группы

$$H_n(G, M) = \operatorname{Tor}_n^{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}, M).$$

$$\dots \rightarrow F_n \otimes_{\mathbb{Z}[G]} M \rightarrow \dots \rightarrow F_0 \otimes_{\mathbb{Z}[G]} M \rightarrow \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}[G]} M$$

Если G -модуль $\mathbb{Z}$ является тривиальным, будем писать $H_n(G) := H_n(G, \mathbb{Z})$

Гомологии групп

- Существует множество вариантов гомотопически эквивалентных конструкций BG
- Гомологии групп можно определять, как гомологии классифицирующего пространства группы

Теорема

Для дискретной группы G и тривиального G -модуля $\mathbb{Z}$ имеет место изоморфизм

$$H_n(G) \cong H_n(BG)$$

- Через $K(G, 1)$ будем обозначать пространство Эйленберга-Маклейна: $\pi_n K(G, 1) = 0$ ($n > 1$) и $\pi_1 K(G, 1) = G$
- Для дискретной группы G имеется гомотопическая эквивалентность $BG \simeq K(G, 1)$

Определение

Ациклической называется такая группа G , что $H_*(G) \cong H_*(\text{pt})$

- Если $H_*(G, M) = 0$ для любого G -модуля M , то $G = \{e\}$
- Действительно, иначе $H_1(G, \mathbb{Z}[G/A]) \cong H_1(A)$ (по лемме Шапиро) для циклической $A < G$
- Ациклических в любой системе коэффициентов групп не бывает

Примеры ациклических групп

- Группа гомеоморфизмов $\mathbb{R}^n$ с компактными носителями в дискретной топологии (J. Mather, 1971)
- Группа $GL(V)$ обратимых преобразований бесконечномерного векторного (гильбертова) пространства в дискретной топологии (D. McDuff, 1983)

В маломерной топологии:

- Коммутанты групп узлов с тривиальным полиномом Александера (A. J. Berrick, J. A. Hillman, 2003)
- Некоторые расширения групп кос

Определение

$$\text{Hig}_n := \langle x_i, i \in \mathbb{Z}/n \mid [x_{i-1}, x_i] = x_i \rangle,$$

где $[x, y] = xyx^{-1}y^{-1}$, $n \geq 4$

- При $n \leq 3$ группы Hig_n тривиальны
- При $n \geq 4$ группы Hig_n нетривиальны
- $K(\text{Hig}_4, 1)$ реализуется в виде двумерного клеточного комплекса, у которого имеется одна 0-клетка, четыре 1-клетки и четыре 2-клетки

Построим двумерный симплициальный комплекс, гомотопически эквивалентный $K(\text{Hig}_4, 1)$

Конструкция $K(\text{Hig}_4, 1)$

$$\text{Hig}_4 = \langle a, b, c, d \mid a^{-1}ba = b^2, b^{-1}cb = c^2, c^{-1}dc = d^2, d^{-1}ad = a^2 \rangle$$

Шаг 1: строим классифицирующее пространство группы
 $\text{BS}(1, 2) = \langle a_1, b_1 \mid b_1^{a_1} = b_1^2 \rangle$

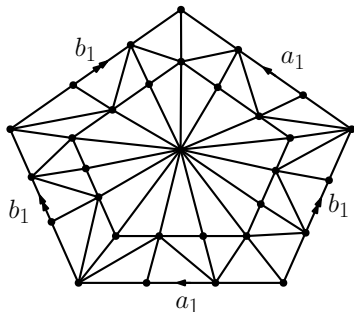


Рис. 1

Теорема (E. Dyer, A. T. Vasquez, 1972)

Пусть G задана образующими S и одним соотношением r , и r не является степенью (большей 1) никакого слова. Тогда клеточный 2-комплекс, получаемый обычной приклейкой 2-клетки к букету окружностей, биективно соответствующих образующим из S вдоль слова r , асферичен.

Следствие

Пространство $K(\mathrm{BS}(1, 2), 1)$ реализуется описанным выше комплексом

Шаг 2: Возьмём 2 копии таких (как на рис. 1)
 триангулированных пятиугольников и склеим из них $K(L, 1)$,

$$L = \langle b_1, a_1, a_2 \mid b_1^{a_1} = b_1^2, a_1^{a_2} = a_1^2 \rangle$$

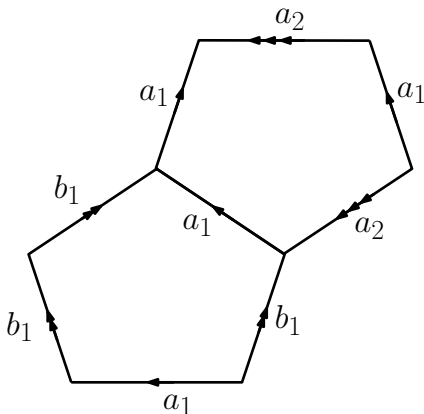


Рис. 2

Шаг 3: Теперь возьмём 2 копии комплексов $K(L, 1)$ и склеим $K(\text{Hig}_4, 1)$

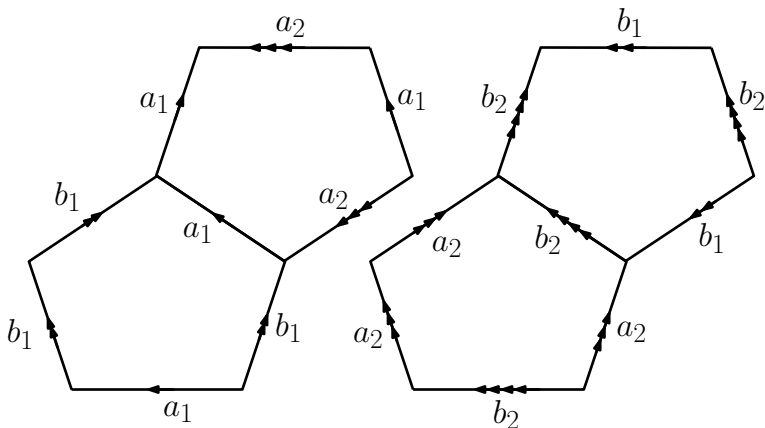


Рис. 3

- Hig_n получаются из n копий групп $BS(1, 2)$ при помощи амальгамированного произведения
- $K(\text{Hig}_n, 1)$ можно представить в виде двумерного комплекса с 1 нульмерной клеткой, n одномерными клетками и n двумерными клетками
- Симплициальное разбиение 5-угольника даёт симплициальное разбиение $K(\text{Hig}_4, 1)$

Отсутствие ациклических конечных групп

Теорема (R. G. Swan, 1960)

Пусть G — конечная группа и H — нетривиальная подгруппа в G . Тогда индуцированный гомоморфизм $H_i(H) \rightarrow H_i(G)$ нетривиален для бесконечного числа значений $i > 0$.

Класс конечных групп является гомологически жёстким:

Теорема (M. Culler, 1978)

Пусть $f : H \rightarrow G$ — гомоморфизм конечных групп, индуцирующий гомоморфизм $f_* : H_*(H) \rightarrow H_*(G)$. Если f_* является изоморфизмом, то и f тоже.

Суперсовершенные группы

Определение

Дискретная группа G называется *суперсовершенной*, если $H_1(G) = 0$ и $H_2(G) = 0$.

Теорема (R. Steinberg, J. Milnor)

При $n \geq 3$ группа $SL(n, \mathbb{F}_q)$ суперсовершенная, кроме трёх случаев: $SL(3, \mathbb{F}_2)$, $SL(4, \mathbb{F}_2)$, $SL(3, \mathbb{F}_4)$.

Следствие

Существуют суперсовершенные, но неациклические группы

Определение

Ациклическим называется пространство X (клеточный комплекс), для которого $H_*(X) \cong H_*(\text{pt})$

- Если $H_*(X; \mathcal{A}) = 0$ для любой локальной системы коэффициентов $\mathcal{A}$, то X является стягиваемым пространством

Примеры ациклических пространств

- Классифицирующие пространства ациклических групп
- Существуют неасферичные ациклические пространства (приведём пример позже)

Универсальная ацикличная группа

Напомним, что «к. о.» значит «конечно определённая»

Определение

К. о. группа G называется *универсальной*, если она содержит все к. о. группы

Теорема (G. Higman, 1951)

Существует универсальная к. о. группа

Теорема (M. Chiodo, M. Hill, 2016)

Существует универсальная к. о. группа U с 8 образующими и 26 соотношениями

Универсальная ацикличная группа

Суммируя результаты Баумслага (1983) и Хилла (2016), получаем

Следствие

Всякая к. о. группа вкладывается в универсальную ацикличную группу $\mathcal{U}$ с 12 образующими и 38 соотношениями

Доказательство.

- Пусть $E = \langle \overline{U}, t \mid t\overline{u}t^{-1} = u, u \in U \rangle$, $U \cong \overline{U}$, $U \hookrightarrow \overline{U}$
- $H_1 E \cong \mathbb{Z}$, $H_n E = 0$, $n > 1$
- Группа $E \star_{\mathbb{Z}} \text{Hig}_4$ будет искомой ацикличной КО группой



Универсальная ацикличная группа

Следствие

Существует к. о. ацикличная группа, содержащая элементы конечного порядка

Универсальная ацикличная группа

Определение

Гомологическим конусом над группой G называется такая группа CG , что $G \hookrightarrow CG$ и CG — ацикличная группа

Следствие

Всякая к. о. группа вкладывается в универсальный к. о. гомологический конус U

Гомологические сферы и диски

Определение

Гомологической сферой называется гладкое замкнутое многообразие Σ^n , т. ч. $H_*(\Sigma^n) \cong H_*(S^n)$.

Гомологическим диском называется компактное ациклическое многообразие с краем

Вопрос

Какие группы реализуются, как фундаментальные группы гомологических сфер?

Утверждение (Н. Hopf, 1942)

Пусть X — связный CW -комплекс. Тогда имеется точная последовательность групп:

$$\pi_2(X) \xrightarrow{h} H_2(X; \mathbb{Z}) \rightarrow H_2(\pi_1(X); \mathbb{Z}) \rightarrow 0,$$

где h — гомоморфизм Гуревича, а действие $\pi_1(X) \curvearrowright \mathbb{Z}$ тривиально.

Из данного утверждения и компактности Σ^n следует, что $\pi_1(\Sigma^n)$ должна быть к. о. суперсовершенной группой

Гомологические сферы и диски

Определение

К. о. группа π называется *реализуемой*, если существует гомологическая сфера Σ^n , т. ч. $\pi \cong \pi_1(\Sigma^n)$

Полная характеристика реализуемых групп в размерностях ≥ 5

Теорема (М. Kervar, 1969)

Пусть π — суперсовершенная к. о. группа, и $n \geq 5$. Тогда существует гладкая гомологическая n -сфера с фундаментальной группой π .

В настоящее время является открытым

Вопрос

Какие к. о. группы реализуются, как фундаментальные группы гомологических 4-сфер?

Гомологические сферы и диски

Утверждение

Существуют гомологические диски с конечной фундаментальной группой

Доказательство.

- Возьмём бинарную группу икосаэдра $SL_2(\mathbb{F}_5) \cong \langle a, b \mid (ab)^2 = a^3 = b^5 \rangle$
- Методом С. П. Новикова (1974) построим компактное гладкое многообразие: гомологический диск с фундаментальной группой π . Он будет искомым ациклическим пространством, поскольку его фундаментальная группа конечна



Примеры ациклических пространств

Следствие

Существуют ациклические пространства, не имеющие типа $K(\pi, 1)$

Функтор Дрора

Имеется эндифунктор Дрора (1972) A в категории симплициальных множеств с отмеченной точкой и отображение a

$$A : \mathbf{sSet}_* \rightarrow \mathbf{sSet}_*, \quad a : AX \rightarrow X$$

- AX ациклично для любого симплициального X
- Отображение $a : AX \rightarrow X$ универсально с точностью до гомотопии среди всех отображений из ациклического пространства в X
- Пусть $H_j(X) \cong 0$ для любого $1 \leq j \leq n$. Тогда гомотопический слой отображения $a : AX \rightarrow X$ является $(n - 1)$ -связным. В частности, если X ациклично, то a — слабая эквивалентность

Конструкции Кана-Тёрстона

Теорема (Д. Кан, У. Тёрстон, 1976)

Для любого линейно связного симплициального множества $X \in \mathbf{sSet}_*$ с отмеченной точкой существует расслоение Серра

$$t : TX \rightarrow X,$$

естественное по X и обладающее следующими свойствами:

- Морфизм $t : T \rightarrow \mathrm{Id}$ индуцирует изоморфизмы

$$H_*(TX; t^* \mathcal{A}) \cong H_*(X; \mathcal{A}), \quad H^*(TX; t^* \mathcal{A}) \cong H^*(X; \mathcal{A}).$$

- $TX \simeq K(G_X, 1)$ и $t_* \pi_1 : G_X \rightarrow \pi_1 X$ — эпиморфизм

- $P_X = \ker t_*\pi_1$ — совершенная нормальная подгруппа в G_X
- Гомотопический тип пространства X определяется парой групп (G_X, P_X)
- $X \simeq (K(G_X, 1), P_X)^+$ — применение плюс-конструкции Квиллена
- $X = \dot{\mathbb{Z}}_\infty(K(G_X, 1) \rightarrow K(G_X/P_X, 1))$ — применение послыного функтора $\mathbb{Z}$ -пополнения Боусфилда-Кана

Свойства (продолжение)

- $\tilde{X} \simeq \mathbb{Z}_\infty K(P_X, 1)$
- $\text{Fibre}(TX \rightarrow X) \simeq AK(P_X, 1)$

Свойства могут быть выведены из спектральной последовательности Серра — они не используют специфику конструкции Кана-Тёрстона

Следствие (Д. Кан, У. Тёрстон)

Имеет место эквивалентность категорий

$$\text{Ho } \mathcal{CW} \cong \mathcal{GP}[\Gamma^{-1}]$$

- $\mathcal{GP} = \{(G, P)\}$, P — совершенная нормальная в G , отображения — гомоморфизмы $f : (G, P) \rightarrow (G', P')$, для которых $f(P) \subset P'$
- Γ состоит из тех морфизмов $f : (G, P) \rightarrow (G', P')$ из $\text{Mor}(\mathcal{GP})$, что $f : G/P \cong G'/P'$ и $f_* : H_*(G; A) \cong H_*(G'; A)$ для любого G'/P' -модуля A

Известные реализации функтора Кана-Тёрстона

- **Исходная конструкция Кана и Тёрстона.** Использует технику симплициальных множеств. Для небольших пространств X получается **очень большое TX** : если X конечный комплекс, то TX имеет счётное число клеток
- **Конструкция Маундера.** Использует симплициальное разбиение пространства X . Конечному комплексу X отвечает **конечный комплекс TX**

Конструкция Маундера

- 1 На 1-мерном остове полагаем t тождественным
- 2 Пусть K получается из L приклеиванием n -симплекса σ к $\partial\sigma \subset L$, где $\dim \sigma \geq 2$
- 3 Тогда $T(\partial\sigma) \subset TL$, и $f : \sigma \cong \Delta^n$, Δ^n — стандартный симплекс, $Tf : T(\partial\sigma) \cong T(\partial\Delta^n)$ является гомеоморфизмом. $T(\partial\Delta^n)$ является пространством типа $K(\pi, 1)$ по предположению индукции
- 4 $\pi \hookrightarrow C\pi$ индуцирует $g : T(\partial\Delta^n) \rightarrow K(C\pi, 1)$
- 5 Приклеим цилиндр $g \circ Tf$ вдоль $T(\partial\sigma)$ к TL
- 6 Продолжим t до отображения $t : TK \rightarrow K$, отправляя $K(C\pi, 1)$ в барицентр симплекса σ .

Свобода в построении функторов T

- Известные конструкции функтора T не являются гомотопическими. В частности, стягиваемые пространства обычно переводятся в нестягиваемые
- Функтор T зависит от клеточной (симплициальной) структуры X
- Функтор T зависит от выбора ациклической группы

Варианты функтора Кана-Тёрстона в конструкции Маундера

- **1-й вариант:** в качестве универсального гомологического конуса в конструкции Маундера можно выбрать универсальную ацикличную группу Хигмана $\mathcal{U}$
- **2-й вариант:** для клеток σ с $\dim \sigma = 2$ берём $C\pi = \text{Hig}_4$, для клеток σ с $\dim \sigma \geq 3$ берём $C\pi = \mathcal{U}$

Действие групп

- Из конструкции Маундера следует

Утверждение

Свободное действие дискретной группы G на пространстве X поднимается до действия на конструкции Кана-Тёрстона TX

- Применения функтор T к классифицирующему G -накрытию $EG \rightarrow BG$, получаем

Следствие

Существует ациклическое пространство EG типа $K(\pi, 1)$ со свободным действием группы G

- Обозначим через $BG = EG/G$. Из спектральной последовательности Картана-Лере следует, что $H_*(BG) \cong H_*(G)$

Категория ациклических пространств $\mathcal{A}cusp$

Рассмотрим категорию $\mathcal{A}cusp$, объектами которой являются ациклические G -пространства, а морфизмы — эквивариантные G -отображения

Вопрос

Существует ли конструкция функтора T , для которой объект $\mathcal{B}G$ был бы терминальным в категории $\mathcal{A}cusp$?

Конструкция TK для 3-полиэдров

Данному разбиению K пространства X на полиэдры можно сопоставить пространство TK вместе с отображением $t : TX \rightarrow X$

- 1 Возьмём 1-остов пространства K и на место каждой грани приклеим комплекс Хигмана $K(\text{Hig}_4, 1)$
- 2 Найдём фундаментальную группу полученного TK
- 3 Мы имеем соответствие

$$\{\text{полиэдральные разбиения } K\} \mapsto \{\text{к. о. группы } G_K\}$$

Конструкция TK для 3-многогранников

Для выпуклых 3-многогранников $K = P$ конструкцию можно уточнить

- 1 Выберем в 3-многограннике P максимальное дерево (на рис. фиолетовые рёбра)
- 2 Оставшиеся рёбра — образующие фундаментальной группы 1-остова многогранника (красные рёбра)

Определение

Пунктированная к. о. группа — группа с выделенной образующей

- 3 Рассмотрим f копий пунктированных групп Хигмана, где f — число граней многогранника P
- 4 Приклеим цилиндр отображения $\partial F \rightarrow K(\text{Hig}_4, 1)$ к границе грани F в 1-остове P для каждой группы Хигмана Hig_4

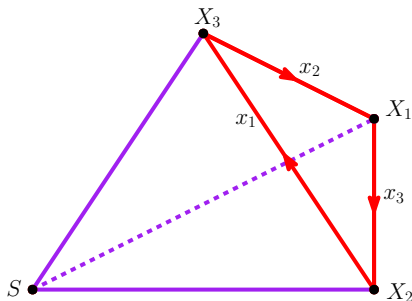


Рис. 4

- $\pi_1(\text{sk}^1 L, S) = \langle x_1, x_2, x_3 \rangle$
- $\bigcup_{i=1}^4 \{[b_i, a_i] = b_i, [c_i, b_i] = c_i, [d_i, c_i] = d_i, [a_i, d_i] = a_i\}$
- $\{x_1 x_2 x_3 = a_1, x_k = a_{k+1}, k = 1, 2, 3\}$

Конструкция TK для 3-полиэдров

- $v - e + f = \chi(P)$ — для полиэдра P
- $\chi(\text{sk}^1 P) = v - e = \chi(P) - f$ — для 1-остова полиэдра $\text{sk}^1 P$
- После стягивания максимального дерева в точку $e' = f - \chi(P) + 1$ — число красных рёбер
- В частности, для $P \cong \mathbb{S}^2$ мы получим $f - 1$ красных рёбер

ТК для разбиения $\mathbb{T}^2$ на квадраты

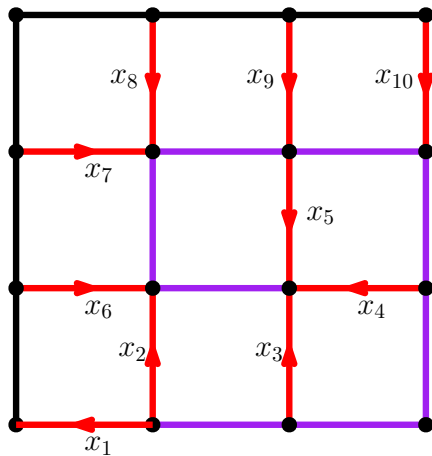


Рис. 5

ТК для разбиения $\mathbb{R}P^2$ на пятиугольники

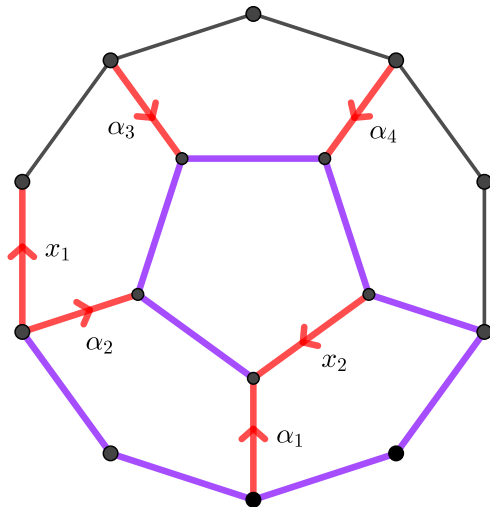


Рис. 6

3-многогранники с гамильтоновым путём

Предположим, что 1-остов 3-многогранника P содержит гамильтонов путь. Опишем канонический способ задания группы P образующими и соотношениями

- 1 Фиксируется ориентированный гамильтонов путь γ в 1-остове P с нумерацией вершин. Оставшиеся рёбра будем называть красными
- 2 Красные рёбра упорядочиваются лексикографически
- 3 Фиксируется ориентация многогранника P
- 4 Помечается по одной образующей для каждой из f групп Хигмана
- 5 Красные рёбра помечаются символами x_i , где i является номером красного ребра в лексикографическом порядке
- 6 Задаётся нумерация граней и записываются соотношения приклейки последовательно для каждой грани

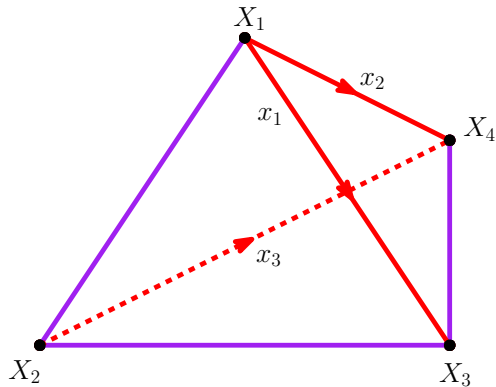


Рис. 7

$$\{x_1^{-1} = a_1, x_2^{-1}x_1 = a_2, x_3^{-1}x_2 = a_3, x_3 = a_4\}$$

Гамильтоновы циклы в фуллеренах

Известен следующий результат

Теорема (F. Kardoš, 2017)

Пусть G является 3-связным планарным кубическим (все вершины имеют степень 3) графом, каждая грань которого является n -угольником, где $n \leq 6$. Тогда G является гамильтоновым

Следствие

1-остов любого фуллерена содержит гамильтонов цикл

Теорема

Каждому фуллерену с выбранной ориентацией P , по группе Хигмана $\text{Hig}_4 = \langle a, b, c, d \mid \dots \rangle$ с отмеченной образующей a и по ориентированному гамильтонову пути γ можно канонически сопоставить конечно определённую группу G_P

ТК для фуллерена $P_{5,1}$

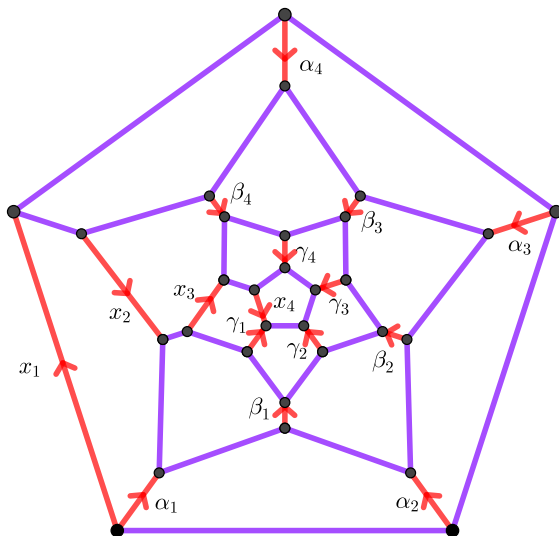


Рис. 8

ТК для фуллерена $P_{5,1}$

- Первый 5-пояс: $x_1^{-1}\alpha_1x_2^{-1} = a_1$, $\alpha_{i+1}\alpha_i^{-1} = a_{i+1}$ ($i = 1, 2, 3$),
 $\alpha_4^{-1} = a_5$
- Второй 6-пояс: $x_2x_3\beta_4^{-1} = a_6$, $\beta_{j+1}\beta_j^{-1} = a_{j+6}$ ($j = 1, 2, 3$),
 $\beta_1 = a_{10}$
- Третий 5-пояс: $\gamma_1x_4^{-1}x_3^{-1} = a_{11}$, $\gamma_{k+1}\gamma_k^{-1} = a_{k+11}$ ($k = 1, 2, 3$),
 $\gamma_4^{-1} = a_{15}$
- Центральная грань: $x_4 = a_{16}$
- Внешняя грань: $x_1 = a_{17}$

Итого, мы имеем $16 + 4 \cdot 17 = 84$ образующих и $4 \cdot 17 + 17 = 85$ соотношений.