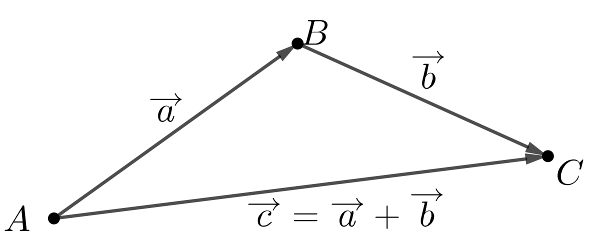
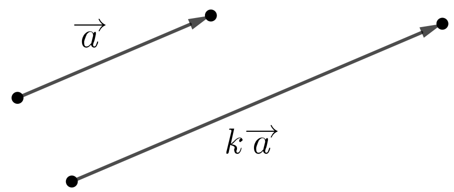
Векторы, движения и преобразования подобия-1

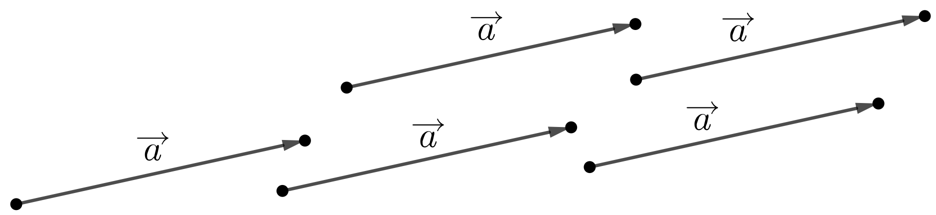
На евклидовой плоскости рассмотрим отрезок AB и запомним, где у него «начало» (точка A) и «конец» (точка B). Такой отрезок называется *закреплённым вектором* $\overrightarrow{AB}$. Т. е. вектор отличается от обычного отрезка тем, что он имеет выделенное начало и конец, поэтому про векторы можно думать, как про стрелочки на плоскости. Будем говорить, что *векторы* $\overrightarrow{AB}$ *и* $\overrightarrow{CD}$ *равны*, если либо точки A, B, C, D лежат на одной прямой, $AB = CD$, AB и CD направлены в одну сторону; либо если на отрезки AB и CD можно натянуть параллелограмм $ABDC$ с противоположными сторонами AB и CD. Таким образом, равные векторы равны по длине, параллельны (или лежат на одной прямой) и «смотрят» в одну и ту же сторону. Все равные векторы мы можем отнести в один класс $\overrightarrow{a}$ равных векторов и назвать его классом *свободных векторов*. Свободный вектор мы можем таскать по плоскости, и он от этого не изменится. Закреплённый же вектор имеет точку приложения. В дальнейшем мы не будем делать разницы между закреплёнными и свободными векторами и будем называть их просто векторами.



Правило треугольника



Умножение вектора на число



Семейство равных векторов

Векторы можно складывать и умножать на числа. *Суммой* $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$ называется вектор $\overrightarrow{AC}$, служащий третьей стороной треугольника ABC — так называемое правило треугольника. Вектором $\overrightarrow{AB}$, *умноженным на число* k, называется вектор, лежащий на прямой AB, длина которого равна $k \cdot AB$, направленный в ту же сторону, что и $\overrightarrow{AB}$, если $k > 0$ и в противоположную, если $k < 0$. При $k = 0$ мы получаем *нулевой вектор* — точку.

1. Четырёхугольник $ABCD$ — параллелограмм. Докажите, что $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$ (правило *параллелограмма*).

2. В треугольнике ABC точка M — середина стороны BC. Выразите вектор $\overrightarrow{AM}$ через векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$.

3. Докажите, что из медиан любого треугольника можно составить треугольник. Найдите отношение площадей полученных треугольников.

4. В четырёхугольнике $ABCD$ точки K и L — соответственно середины сторон AB и CD. Выразите вектор $\overrightarrow{KL}$ через векторы $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{AD}$.

5. Известно, что средняя линия трапеции равна половине суммы оснований. Докажите, что верно и обратное утверждение.

6. Пусть точки E и F — середины сторон AB и CD четырёхугольника $ABCD$, K, L, M, N — середины отрезков AF, CE, BF, DE. Докажите, что $KLMN$ — параллелограмм.

7. В правильном многоугольнике $A_1A_2...A_n$ точка O — его центр. Чему может быть равна сумма $\overrightarrow{OA_1} + ... + \overrightarrow{OA_n}$?