1 В космосе...

Задача 1. На каждой их $2k+1$ планет сидит астроном, наблюдающий ближайшую планету (все расстояния между планетами различны). Докажите, что найдётся планета, которую никто не наблюдает.

Задача 2. В пространстве имеется несколько планет — шаров одинакового радиуса. Отметим на каждой планете множество всех точек, из которых не видна ни одна другая планета. Докажите, что сумма площадей отмеченных частей равна площади поверхности одной такой планеты.

Указание. Рассмотрите сначала плоский случай — он очень наглядный.

2 Выход в пространство, или да прибудет с тобой $\mathbb{R}^3$

Задача 3. Три окружности попарно пересекаются. Для каждых двух окружностей нарисуем их общую хорду. Докажите, что эти три отрезка пересекутся в одной точке.

Задача 4. Общие внешние касательные к трём окружностям на плоскости пересекаются в точках A, B и C. Докажите, что A, B и C лежат на одной прямой.

Задача 5. Круг диаметра $d \in \mathbb{N}$ покрыт бесконечно длинными прямоугольными полосками ширины 1 (возможно, с наложениями). Докажите, что количество таких полосок не меньше d.

3 Инверсия в пространстве

Определение 1. *Инверсия* относительно сферы радиуса R с центром в точке O — это такое отображение, которое переводит каждую точку A в пространстве в такую точку A', что точки O, A и A' лежат на одном луче OA, и $OA \cdot OA' = R^2$. Точка O называется *центром инверсии.*

Нетрудно проверить, что при инверсии сферы и плоскости переходят в сферы или плоскости. Более точно, если сфера проходит через центр инверсии O, то она переходит при инверсии в плоскость; плоскость, проходящая через центр инверсии переходит в себя; сфера, не проходящая через центр инверсии переходит в некую сферу; любая плоскость, не проходящая через центр инверсии, переходит в сферу, проходящую через центр инверсии.

Иверсия — это взаимно-однозначное отображение. При инверсии также окружности и прямые переходят в окружности или прямые.

Инверсия на плоскости (да и в любом $\mathbb{R}^n$) обладает аналогичными свойствами.

Когда в задаче слишком много окружностей или сфер, это должно наводить на мысль об инверсии.

Этих данных должно быть достаточно, чтобы вы смогли решить следующие задачи:

Задача 6. Дан выпуклый шестигранник, все грани которого — четырёхугольники. Известно, что из восьми его вершин семь лежат на одной сфере. Докажите, что и восьмая вершина лежит на той же сфере.

Задача 7. Четыре сферы попарно касаются друг друга в шести различных точках. Докажите, что эти шесть точек лежат на одной сфере.

Задача 8 (Точка Микеля для тетраэдра)**.** На каждом ребре тетраэдра $ABCD$ выбрана точка. Докажите, что четыре сферы, каждая из которых проходит через вершину тетраэдра и выбранные точки на выходящих из неё рёбрах, пересекаются в одной точке.

Задача 9. Подоказывайте свойства инверсии (при условии, что вы решили все предыдущие задачи).