1 Немного о пирамидах

Задача 1. Докажите, что объём тетраэдра равен шестой части произведения двух скрещивающихся рёбер на синус угла между ними.

Задача 2 (Теорема Менелая для тетраэдра)**.** В произвольном тетраэдре $KLMN$ точки A, B, C и D принадлежат рёбрам KN, NL, LM и MK соответственно. Для того, чтобы точки A, B, C и D лежали в одной плоскости, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство:

$$\frac{KA}{AN} \cdot \frac{NB}{BL} \cdot \frac{LC}{CM} \cdot \frac{MD}{DK} = 1.$$

Докажите это.

Задача 3. Сфера касается сторон пространственного четырёхугольника (т. е. вершины четрёхугольника не обязательно лежат в одной плоскости). Докажите, что точки касания лежат в одной плоскости.

Задача 4. Докажите, что любая плоскость, проходящая через середины двух скрещивающихся рёбер тетраэдра, делит его объём пополам.

Задача 5. Докажите, что сумма квадратов длин рёбер тетраэдра равна учетверённой сумме квадратов расстояний между серединами его противоположных рёбер.

Задача 6. У пирамиды $SABCD$ в основании лежит выпуклый четырёхугольник $ABCD$ с перпендикулярными диагоналями, причём высота из точки S падает в их точку пересечения O. Докажите, что основания перпендикуляров, опущенных из точки O на боковые грани пирамиды, лежат на одной окружности.

2 Сферическая геометрия

Рассмотрим единичную двумерную сферу $\mathbb{S}^2$ в $\mathbb{R}^3$. Каждая плоскость, проходящая через центр сферы пересекает $\mathbb{S}^2$ по экваториальной окружности. Будем называть такие окружности *прямыми*, как если бы мы жили на сфере. *Углом* между прямыми назовём угол между соответствующими экваториальными плоскостями. *Отрезком* будем называть часть прямой на сфере. *Сферический треугольник* — это три попарно различные точки на сфере, соединённые отрезками.

Задача 7 (Теорема синусов для сферического треугольника)**.** Пусть α, β и γ — углы сферического треугольника, а A, B и C — длины противолежащих им сторон. Докажите, что

$$\frac{\sin\alpha}{\sin A} = \frac{\sin\beta}{\sin B} = \frac{\sin\gamma}{\sin C}.$$

Задача 8 (Две теоремы косинусов для сферического треугольника)**.** В обозначениях предыдущей задачи докажите:

a. $\cos\alpha = \cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma\cos A$,

b. $\cos A = -\cos B\cos C + \sin B\sin C\cos\alpha$.

Задача 9. Докажите, что для любого сферического треугольника выполняются неравенства треугольника.

Задача 10. Докажите, что периметр любого сферического треугольника меньше 2π.

Задача 11. Докажите, что сумма углов сферического треугольника больше π.

Задача 12. Углы сферического треугольника равны α, β, γ. Найдите площадь этого сферического треугольника.

Задача 13. Существует ли тетраэдр, все двугранные углы которого тупые? Верно ли, что если все плоские углы трёхгранного угла тупые, то и все его двугранные углы тоже? А если наоборот?

Задача 14. Докажите, что в произвольном трёхгранном угле биссектрисы двух плоских углов и угла, смежного с третьим плоским углом, лежат в одной плоскости.

Задача 15. a. В трёхгранный угол $SABC$ вписана сфера, касающаяся граней SBC, SCA и SAB в точках A_1, B_1 и C_1. Выразите величину угла ASB_1 через плоские углы данного трёхгранного угла.

b. Вписанная и вневписанная сферы тетраэдра $ABCD$ касаются грани ABC в точках P и P' соответственно. Докажите, что прямые AP и AP' симметричны относительно биссектрисы угла BAC.