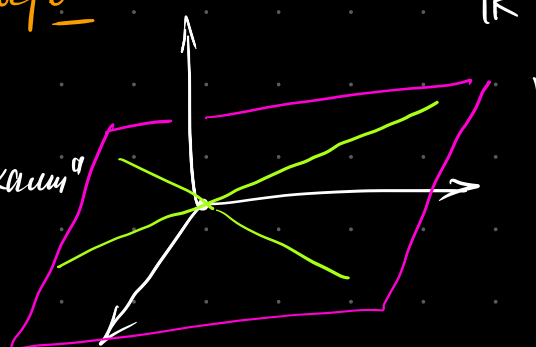
Проективная плоскость

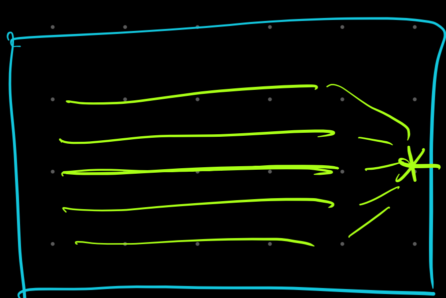
Прямые, проход. через начало коорд. — „точками“

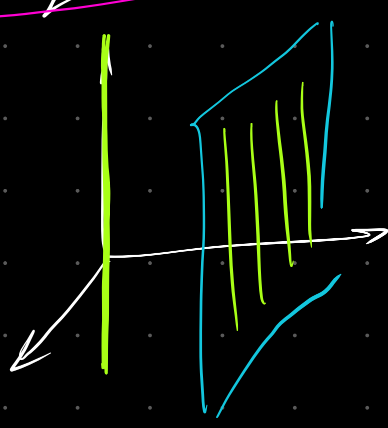
Плоскости, проход. через 0 — это „прямые“

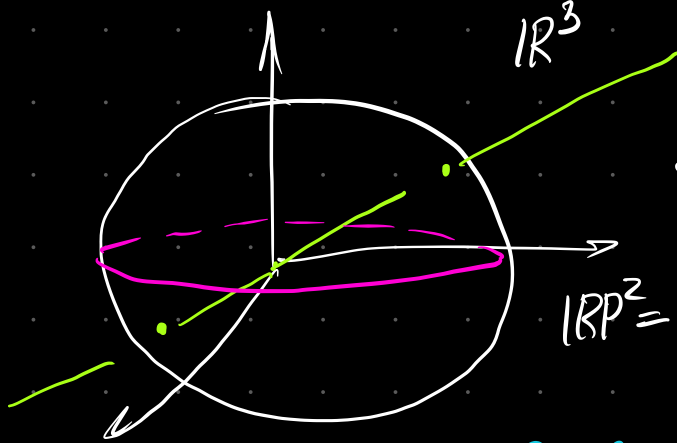


$\mathbb{R}P^2 = \mathbb{R}^3 / \{V\}$

V — одном. подпр-ва $\mathbb{R}^3$



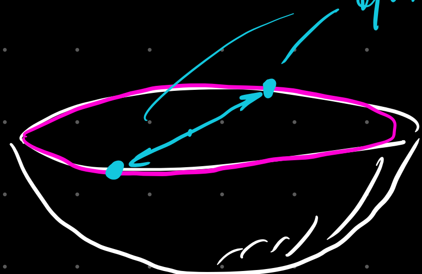




Про $\mathbb{RP}^2$ можно думать как про

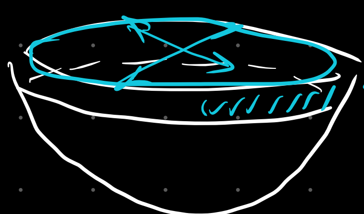
$$\mathbb{RP}^2 = S^2 / \{x \sim (-x)\}$$

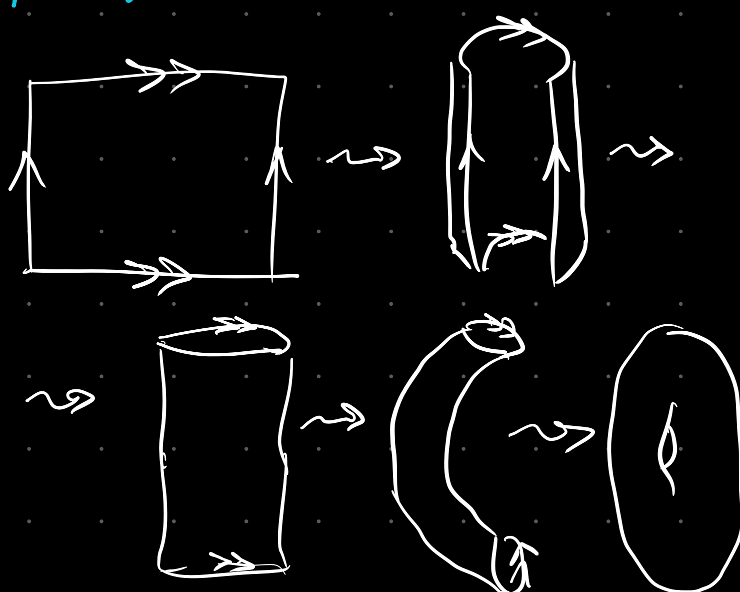
отождеств.

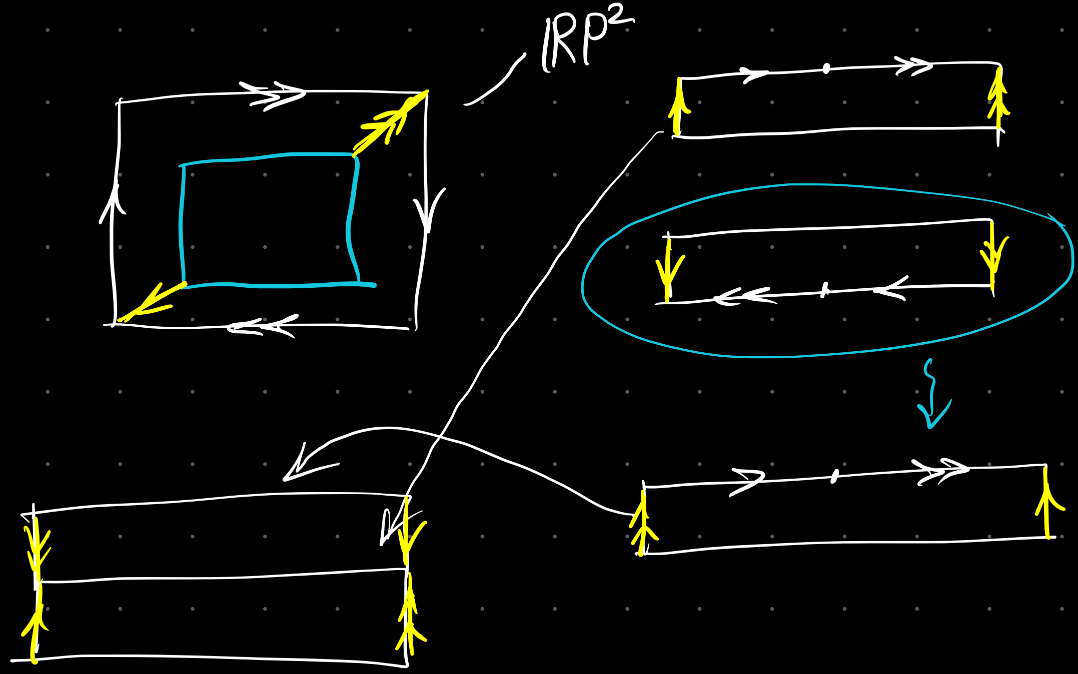


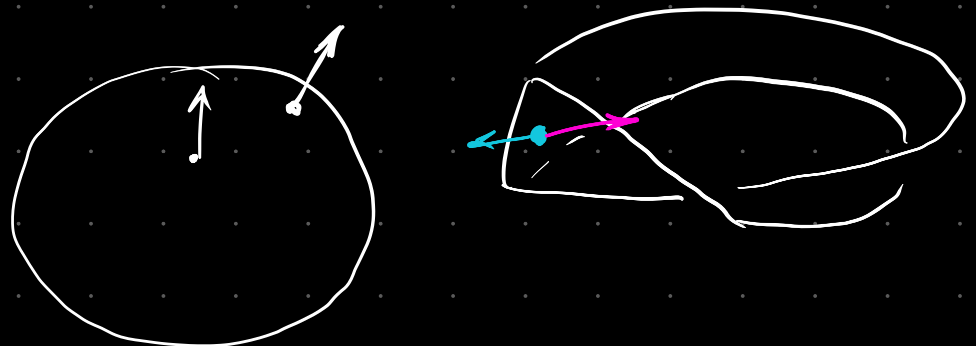
$/\{x \sim (-x)\}$

лист Мёбиуса





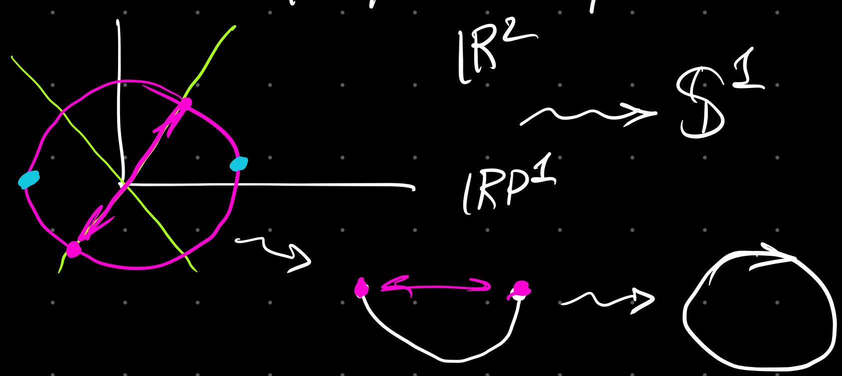




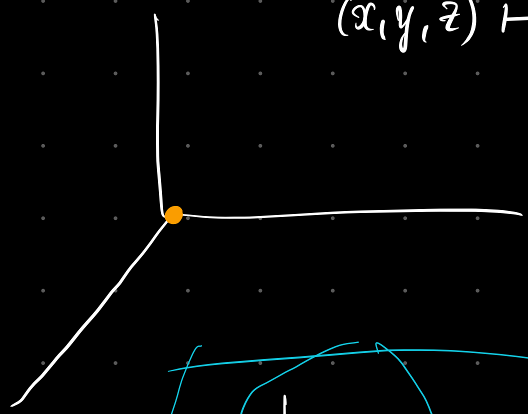
$$\mathbb{R}^{n+1}(x_0,\dots,x_n) \rightsquigarrow \mathbb{R}P^n$$

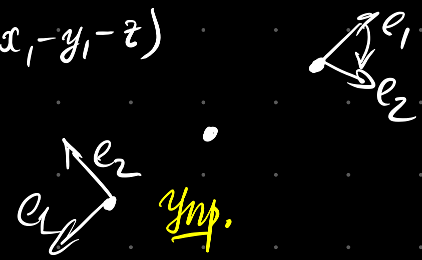
$\mathbb{R}P^n \to$ неориент. n - чётно

$\mathbb{R}P^n \to$ ориент. n - нечётно



$(x, y, z) \longmapsto (-x, -y, -z)$



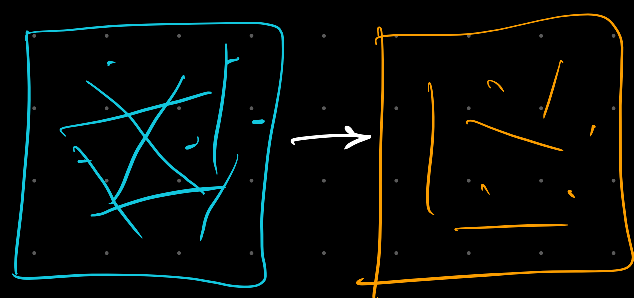


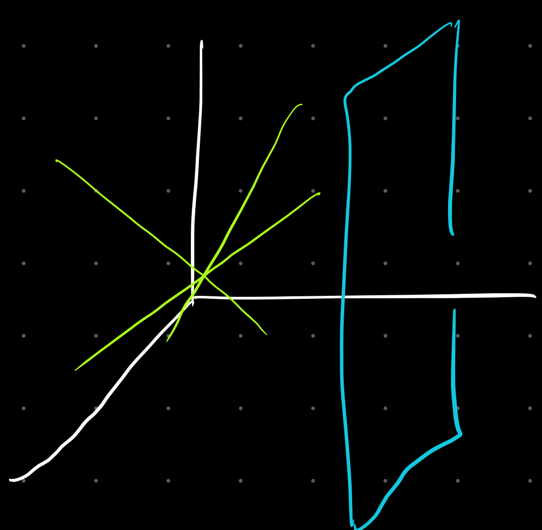
упр.

$(x : y : z)$

$(x, y, z) \sim (\lambda x, \lambda y, \lambda z)$

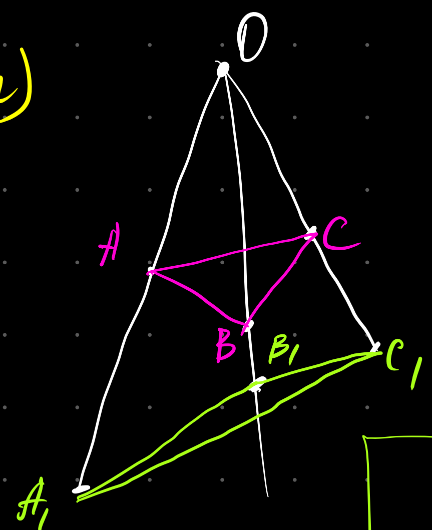
Проект. преобр. $\mathbb{R}^{2*} \to \mathbb{R}^{2*}$ — это смена экрана (карты)





Проект. преобр. — это центр. проекции

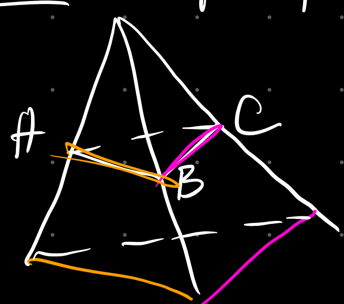
Теорема (Дезарг)

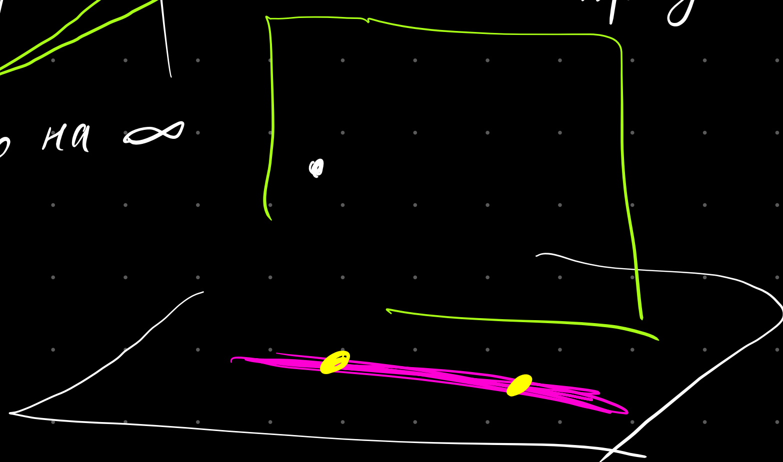


$AB \cap A_1B_1$
$BC \cap B_1C_1$
$AC \cap A_1C_1$

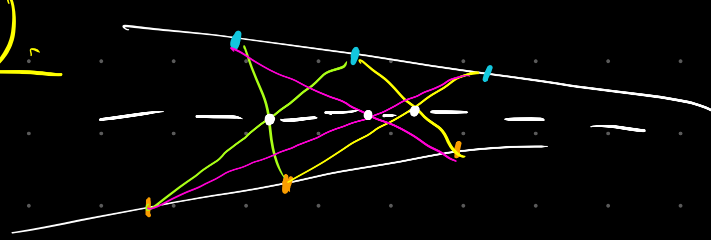
лежат на одну прямую

Hint: Введи прямую на ∞



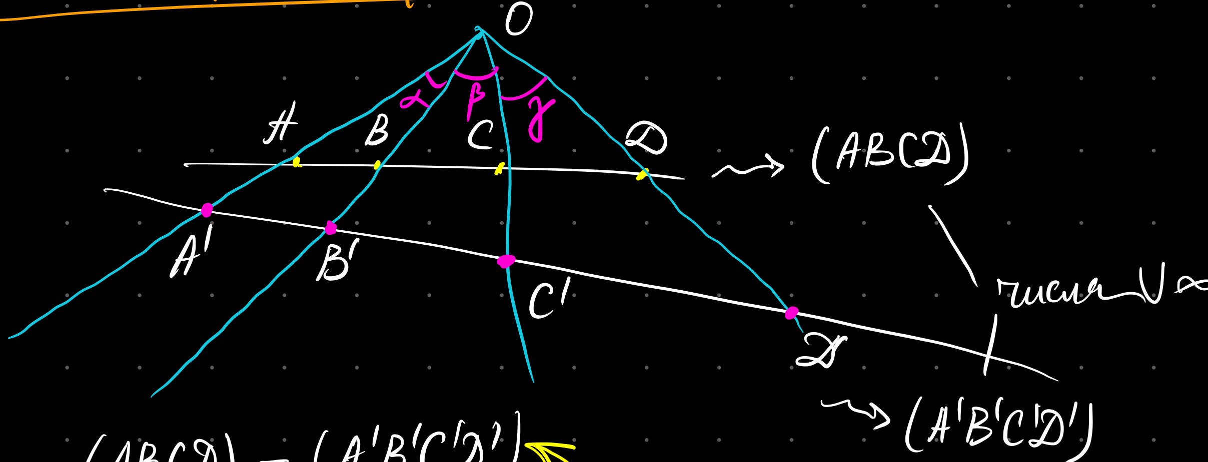


Теорема (Папп):



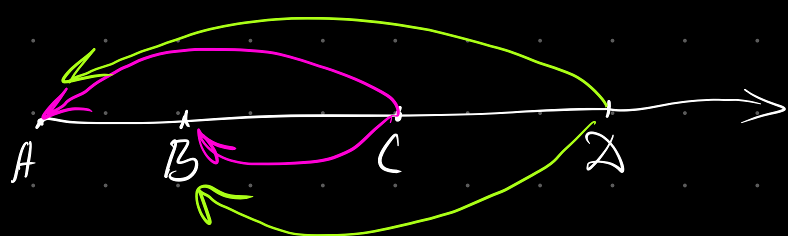
Задача.

Двойное отн-е 4 точек на прямой



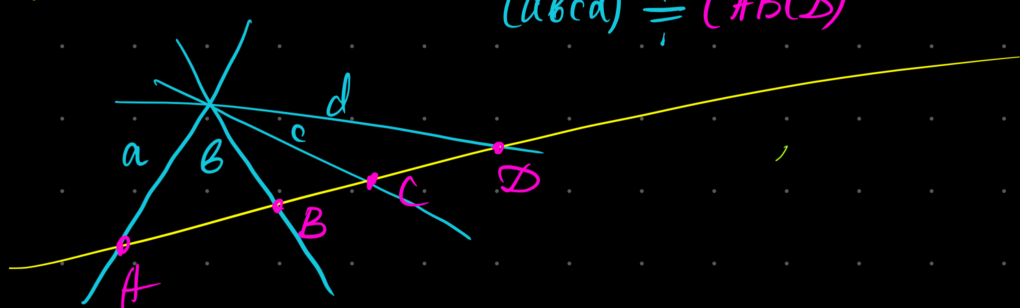
$(ABCD) = (A'B'C'D')$ Упр.

$$(ABCD) = \frac{CA}{CB} : \frac{DA}{DB}$$

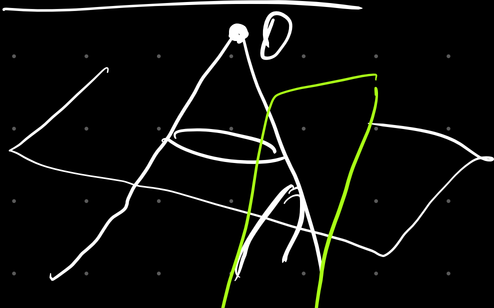


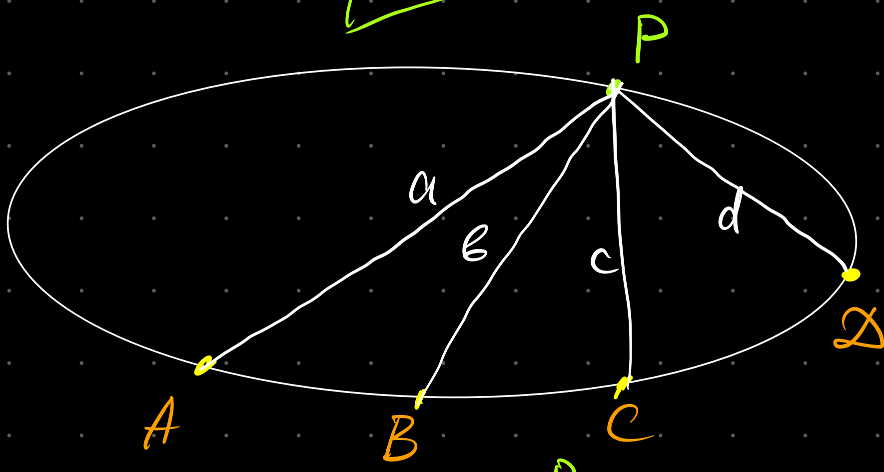
Двойное отнош. прямых, пересек. в одной точке

$(abcd) \doteq (ABCD)$



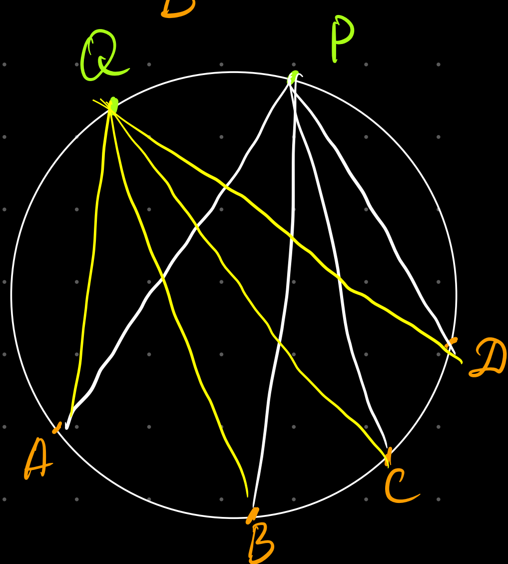
Шары Данделена $\Rightarrow$ все кривые 2-го порядка проективно экв.-ны



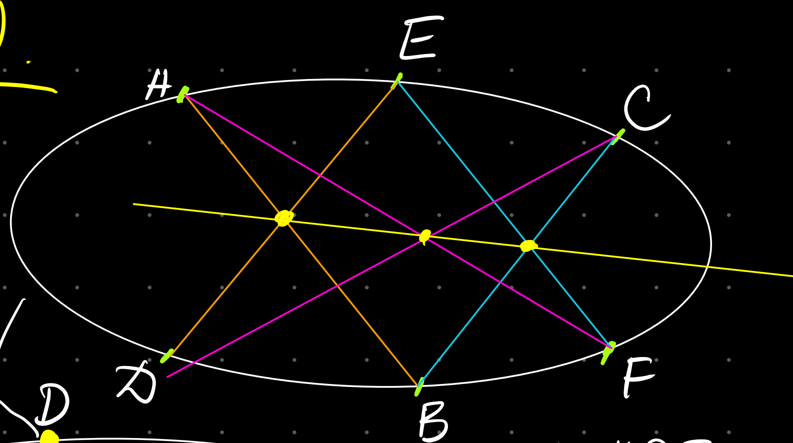


$(ABCD) = (abcd)$

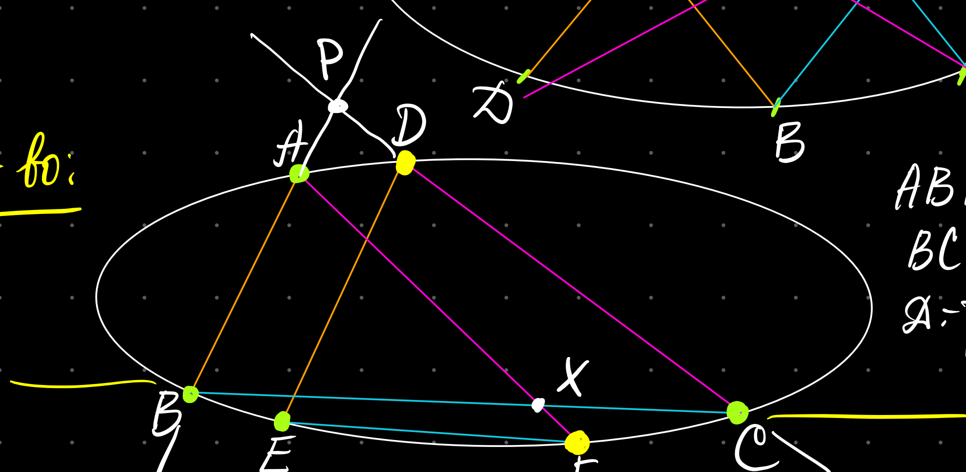
↖ опр-на корректно



Теорема (Паскаль).



Д-во:



$AB \parallel DE$

$BC \parallel EF$

Д-ть: $AF \parallel DC$

Проектирование из точки D точек C, E, B, A на прямую AB:

$$(CEBA) = (P\infty BA) = \frac{BP}{B\infty} : \frac{AP}{A\infty} = \frac{A\infty}{B\infty} \cdot \frac{BP}{AP} = \frac{BP}{AP}$$

1

Проектирование из точки F точек C, E, B, A на BC

$$(CEBA) = (C\infty BX) = \frac{BC}{\cancel{B\infty}} : \frac{XC}{\cancel{X\infty}} = \frac{BC}{XC}$$

Таким образом, $(CEBA) = \dfrac{BP}{AP} = \dfrac{BC}{XC} \Rightarrow AF \parallel DC$

(из подобия соотв.) $\square$