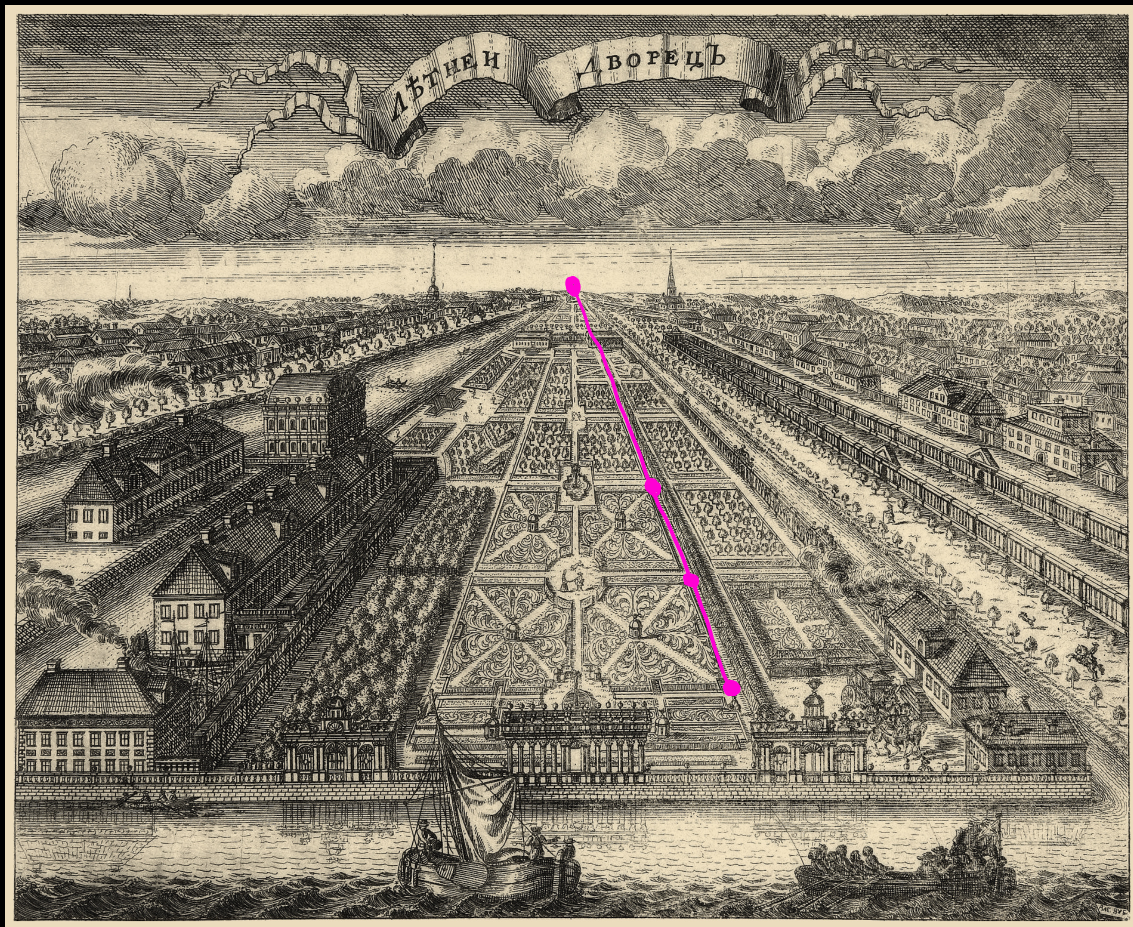
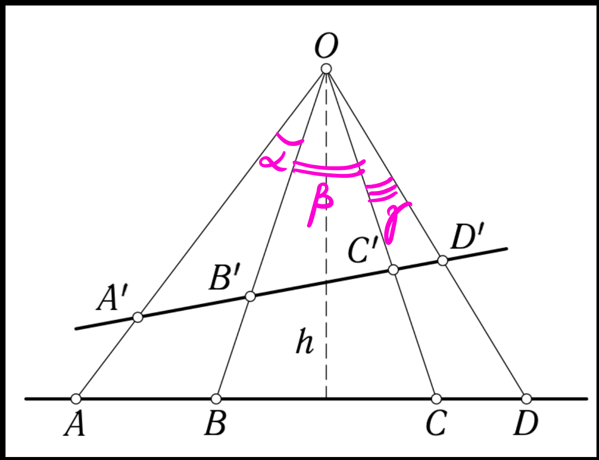


Лемма 1. Двойное отнош. 4 точек на прямой сохраняется при проективных преобр.-х.

Д-во: Т.к. $\forall$ проект. преобр.-е плоскости есть композиция центральных проекций, то дост.-но д-ть для последних



Мы хотим:

$$(ABCD) = (A'B'C'D')$$

$$\| $$

$$\frac{CA}{CB} : \frac{DA}{DB}$$

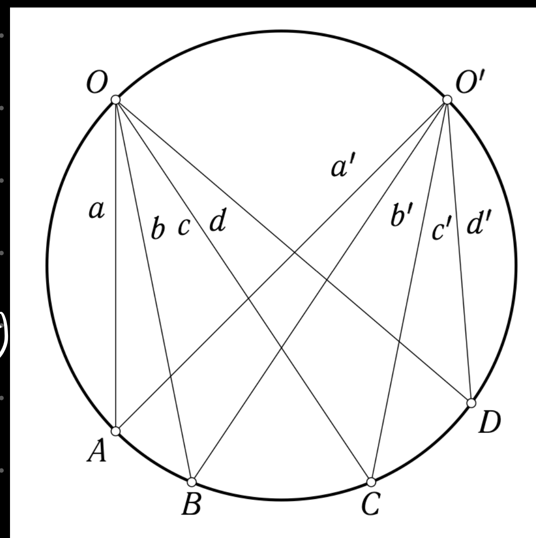
$$\| $$

$$\frac{S_{OAC}}{S_{OBC}} : \frac{S_{OAD}}{S_{OBD}} =$$

$$= \frac{\frac{1}{2} OA \cdot \cancel{OC} \sin(\alpha+\beta)}{\frac{1}{2} OB \cdot \cancel{OC} \sin\beta} : \frac{\frac{1}{2} OA \cdot \cancel{OD} \sin(\alpha+\beta+\gamma)}{\frac{1}{2} OB \cdot \cancel{OD} \sin(\beta+\gamma)} = \frac{\sin(\alpha+\beta)\sin(\beta+\gamma)}{\sin\beta \, \sin(\alpha+\beta+\gamma)}$$

$\square$

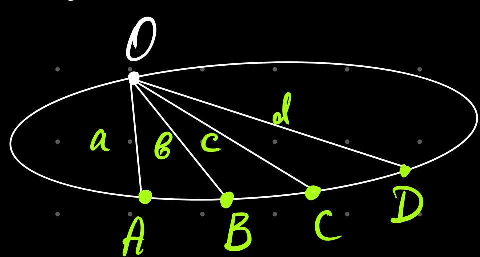
Опр.] 4 прямые a, b, c, d пересекаются в точке O. Тогда двойным отнош. этих прямых (a, b, c, d) наз-ся двойное отношение точек (A, B, C, D), где A, B, C, D – это точки пересечения (произвольной) прямой ℓ и прямых a, b, c, d соотв.-но.



Лемма 2. Опред. двойного отношения корректно $\forall$ кривой второго порядка

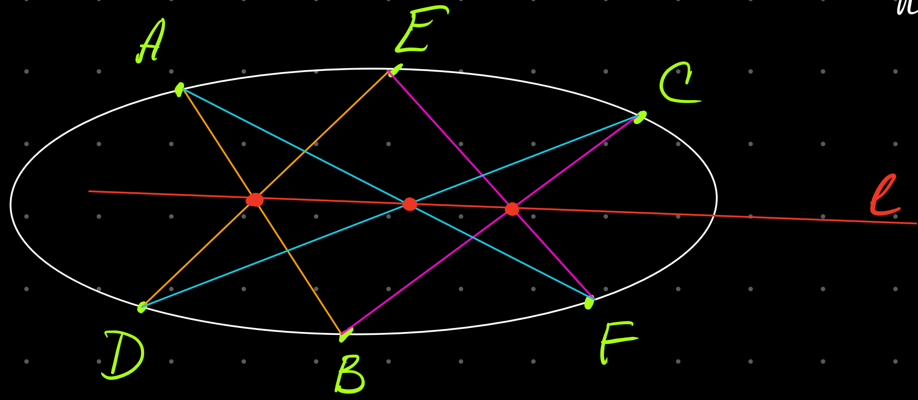
Д.-во: очевидно из леммы 1 и св.-ва углов, опир.-ся на одну окр.-ть $\square$

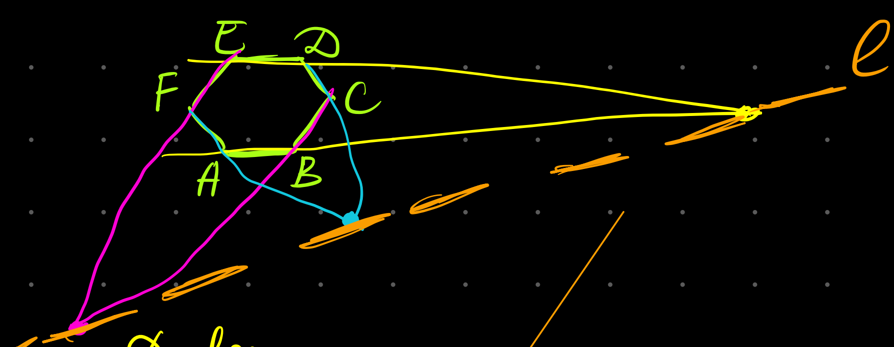
Следствие.



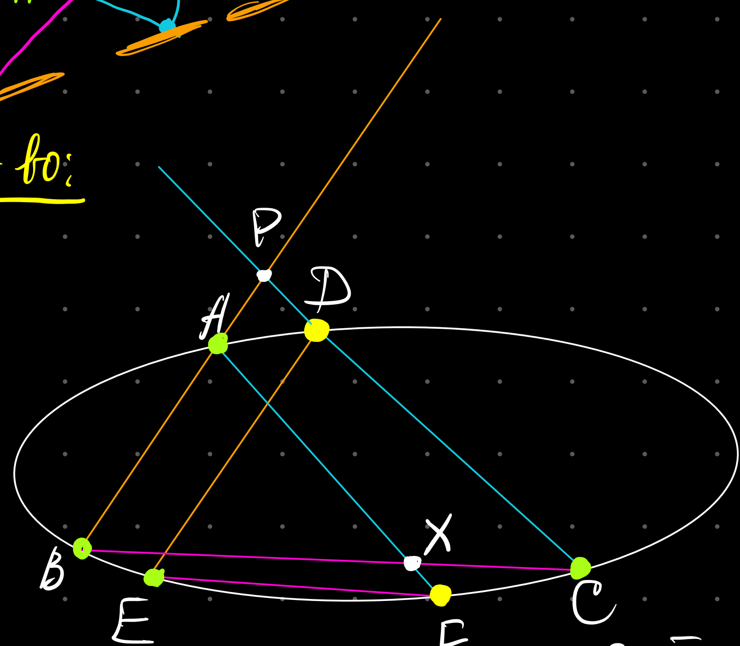
$(A, B, C, D) = (a, b, c, d) = \text{const}$ $\forall$ точки O на нашей кривой

Теорема (Паскаль). Точки пересечения пар противоп. сторон 6-угольника, вписанного в произв. кривую 2-го порядка (элл., гип., параб., пара прямых), лежат на одной прямой.





Д-во:



Мы знаем:
$AB \parallel ED$
$BC \parallel EF$
хотим д-ть:
$AF \parallel CD$

Проектирование из точки D точек C, E, B и A на прямую AB:

$$(C,E,B,A) = (P,\infty,B,A) = \frac{BP}{B\infty} : \frac{AP}{A\infty} = \frac{BP}{AP}$$

Проектирование из точки F точек C, E, B, A на прямую BC:

$$(C,E,B,A) = (C,\infty,B,X) = \frac{BC}{XC}$$

Таким образом,

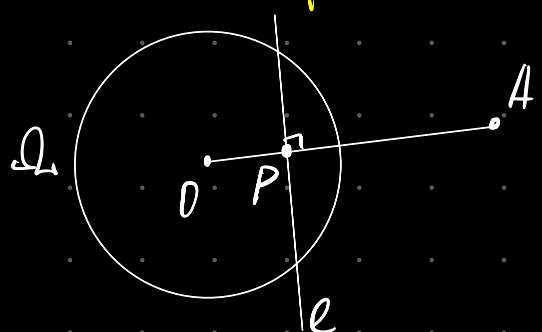
$$\frac{BP}{AP} = \frac{BC}{XC} = (C,E,B,A) \Rightarrow \triangle BAX \sim \triangle BPC \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AF \parallel CD \Rightarrow$$

$\Rightarrow AF \cap CD$ в ∞-удал. точке $\square$

Полюса и поляры

Опр.

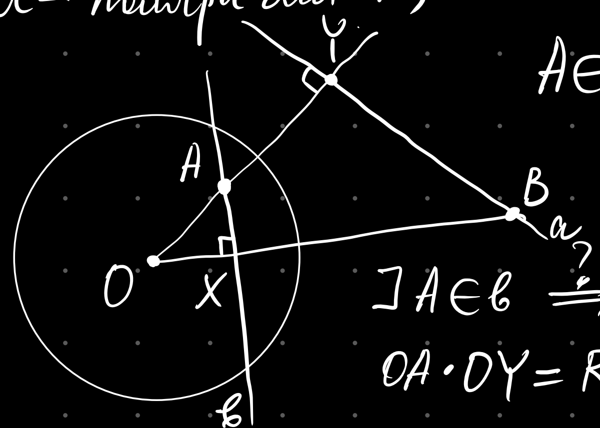


A — полюс, e — поляра, если $e \perp OA$ и e проходит через такую точку P: $OP \cdot OA = R^2$, где R — радиус окр.-ти.

При этом точка P наз.-ся инверсной точке A отн.-но окр.-ти Ω.

Лемма: $\exists$ a — поляра для A, b — поляра для B,

$$A \in b \Leftrightarrow B \in a.$$



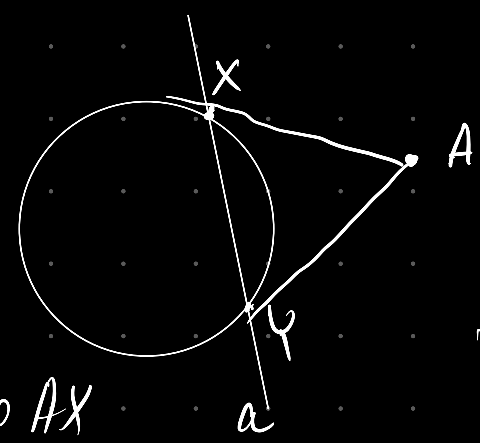
$\exists A \in b \overset{?}{\Rightarrow} B \in a$

$OA \cdot OY = R^2 = OX \cdot OB \Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle OAX \sim \triangle OBY$ (по II призн.)

$\Rightarrow \angle OYB = \frac{\pi}{2}$ $\square$

Следствие.

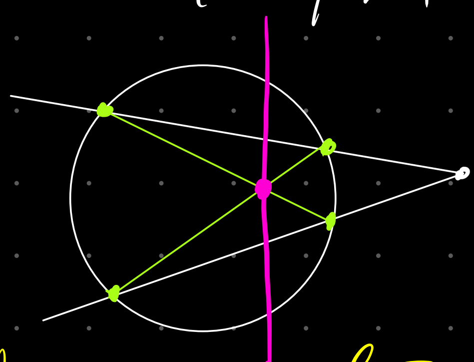


Поляра к точке A вне окр. — ТЧ проходит через точки касания касательных, выпущенных из точки A

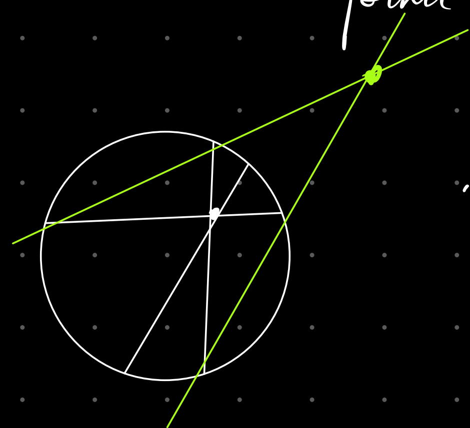
Д-во:

Поляра к X — это AX

— // — к Y — это AY $\square$

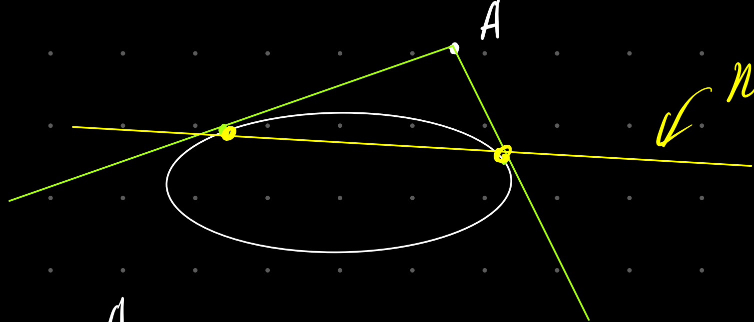


Упр.



Полярное соответствие

Обобщим на произвольные кривые 2-го порядка.



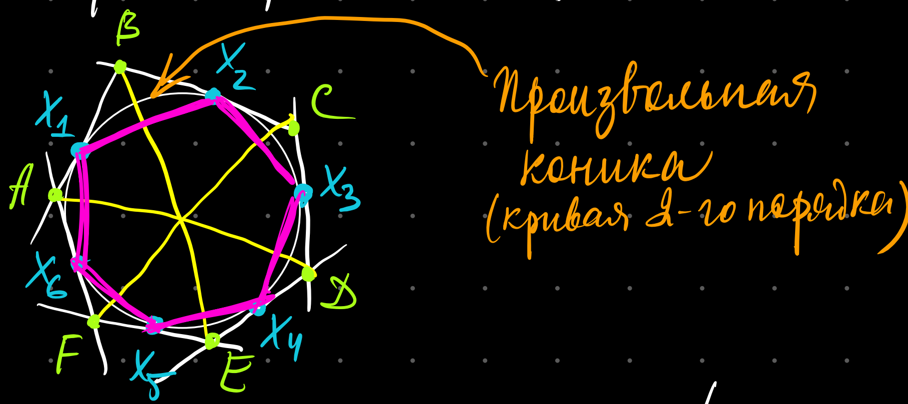
поляра относительно полюса A и эллипса

A лежит на поляре b к точке B

$\Updownarrow$

поляра a к точке A проходит через точку B

Теорема (Брианшон). Если в 6-угольник (обобщ.) можно вписать кривую 2-го порядка, то главные диаг. пересекаются в одной точке.



Д-во: Применим принцип двойственности (полярное соответствие)

Согласно нему

$X_1 \longleftrightarrow AB$

$X_2 \longleftrightarrow BC$

"$\longleftrightarrow$" означает полярное соответствие

...

$X_1X_2 \longleftrightarrow B$

$X_2X_3 \longleftrightarrow C$

...

$BE \longleftrightarrow$ точка пересечения X_1X_2 и X_4X_5

$CF \longleftrightarrow$ точка пересечения X_2X_3 и X_5X_6

...

Тогда утв.-е про то, что прямые AD, FC и BE пересекутся в одной точке равносильно двойственному утверждению о том, что точки пересечения пар противоположных сторон вписанного 6-угольника $X_1X_2X_3X_4X_5X_6$ лежат на одной прямой.

Последнее утв.-е — теорема Паскаля, док.-ая нами выше $\square$