# Геометрия масс

Пусть в концах $A$ и $B$ невесомого стержня закреплены две точки с массами $m_1$ и $m_2$. В какое место можно поставить опору так, чтобы стержень находился в равновесии? Ответ вам скорее всего известен — это «правило рычага»: нужно на отрезке $AB$ взять такую точку $M$, что $\dfrac{AM}{MB} = \dfrac{m_2}{m_1}$. Эта точка — *центр масс*. Каким геометрическим свойством обладает данная точка? Заетим, что $m_1\overrightarrow{MA} + m_2\overrightarrow{MB} = 0$. Последнее свойство служит определением для центра масс $n$ точек.

**Определение.** *Центром масс* системы точек $A_1, ..., A_n$ с массами $m_1, ..., m_n \geqslant 0$ называется такая точка $M$, что $m_1\overrightarrow{MA_1} + m_2\overrightarrow{MA_2} + ... + m_n\overrightarrow{MA_n} = \overrightarrow{0}$.

**Задача 1.** Докажите, что центр масс существует у любой системы конечного числа точек. (**Теорема о существовании центра масс**)

**Задача 2.** Докажите, что центр масс единственен. (**Теорема о единственности центра масс**)

Кроме того, имеется следующий важный факт:

**Теорема о перегруппировке масс.** Пусть имеется некоторая система точек $\mathscr{A} = \{A_1, ..., A_n\}$ с массами $m_1, ..., m_n$ соответственно. Тогда центр масс этой системы можно найти следующим образом. Разобьём множество $\mathscr{A}$ на попарно непересекающиеся множества $\mathscr{A} = \mathscr{B}_1 \cup ... \cup \mathscr{B}_k$. В каждом множестве $\mathscr{B}_i$ найдём центр масс точек в него входящих и обозначим полученную точку через $C_i$, приписав ей массу, равную, сумме масс всех точек из $\mathscr{B}_i$. Тогда центр масс точек из множества $\mathscr{A}$ совпадёт с центром масс построенных таким образом точек $C_i$.

Например, хотим мы найти центр масс трёх точек $A, B$ и $C$, имеющие равный вес — по 1. Воспользуемся данной теоремой. Центр масс точек $A$ и $B$ – эта середина отрезка $AB$, т. к. точки имеют равные веса (обозначим её точкой $M$), имеющая массу $1+1 = 2$. Теперь найдём центр масс точек $M$ и $C$. Несложно понять, что этой точкой будет точка $K$, такая, что $MK/KC = 2:1$. Стало быть, центром масс системы из трёх точек с равными весами — это точка пересечения медиан треугольника $ABC$. Попутно мы доказали, что медианы пересекаются в одной точке, т. к. центр масс единственен и лежит на всех медианах (ведь аналогичные рассуждения мы могли бы повторить, разбивая семейство точек на группы $A, C$ и $B$; $B, C$ и $A$).

Таким образом можно решать некоторые геометрические задачи. Нужно в некоторые точки положить некоторые массы — неотрицательные вещественные числа и несколькими способами найти центр масс точек, по разному разбивая их на группы.

**Задача 3.** Пусть $A_1, B_1, ..., F_1$ — середины сторон $AB, BC, ..., FA$ произвольного шестиугольника. Докажите, что точки пересечения медиан треугольников $A_1C_1E_1$ и $B_1D_1F_1$ совпадают.

**Задача 4.** На сторонах $AB, BC, CD, DA$ выпуклого четырёхугольника $ABCD$ взяты точки $K, L, M, N$ соответственно, причём $AK : KB = DM : MC = \alpha$ и $BL : LC = AN : ND = \beta$. Пусть $P$ — точка пересечения отрезков $KM$ и $LN$. Докажите, что $NP : PL = \alpha$ и $KP : PM = \beta$.

**Задача 5.** Докажите, что если у многоугольника есть несколько осей симметрии, то все они пересекаются в одной точке.

**Задача 6.** Вписанная окружность треугольника $ABC$ касается сторон $AB, BC, AC$ в точках $C_1, A_1, B_1$ соответственно. Докажите, что прямые $AA_1, BB_1, CC_1$ пересекаются в одной точке.

**Задача 7.** Докажите теорему о перегруппировке масс.

**Задача 8.** При помощи масс докажите теорему Чевы: на сторонах $AB, BC, CA$ отметили точки $C_1, A_1, B_1$ соответственно, прямые $AA_1, BB_1, CC_1$ пересекаются в одной точке $\Leftrightarrow \dfrac{AC_1}{C_1B} \cdot \dfrac{BA_1}{A_1C} \cdot \dfrac{CB_1}{B_1A} = 1$.