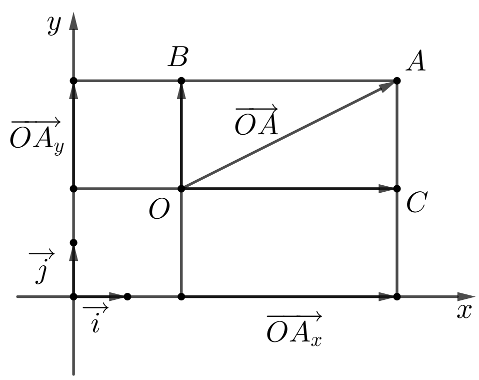
Разложение вектора по базису

Чтобы вы чувствовали себя более комфортно при изучении математики, желательно знать как можно больше о конструкции векторов. До этого мы с вами определили векторы и поговорили о сложении и умножении их на числа. Теперь давайте рассмотрим наглядный пример. На плоскости живёт робот, который может двигаться по горизонтали на любое расстояние и по вертикали на любое расстояние. Пусть в начальный момент он находится в точке O. Верно ли, что робот может попасть в любую точку A плоскости за некоторое количество операций? Конечно! Проведём через точку O горизонтальную прямую Ox и вертикальную — Oy. Опустим из точки A перпендикуляры на Ox и Oy, пересекающие их в точках B и C соответственно. Тогда по правилу параллелограмма $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA}$. Значит, чтобы попасть в точку A, робот должен вначале сместится по $\overrightarrow{OB}$, затем по $\overrightarrow{OC}$. На осях Ox и Oy отметим по вектору единичной длины $\overrightarrow{i}$ и $\overrightarrow{j}$ соответственно. Тогда можно записать, что $\overrightarrow{OA} = OB \cdot \overrightarrow{i} + OC \cdot \overrightarrow{j}$, поскольку $OB \cdot \overrightarrow{i} = \overrightarrow{OB}, OC \cdot \overrightarrow{j} = \overrightarrow{OC}$.

Теперь дадим

Определение. Векторы $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$ называются *базисом* плоскости, если любой вектор единственным образом представляется в виде суммы векторов $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$, умноженных на какие-то числа.

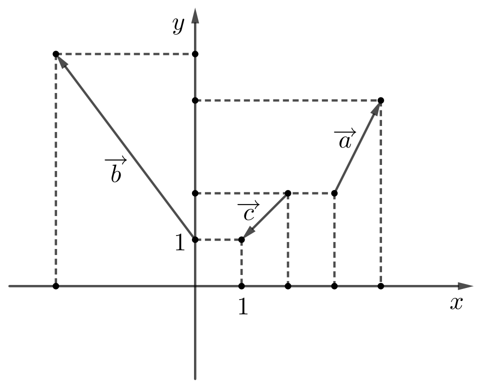
В приведённом выше примере базис образовывали векторы $\overrightarrow{i}$ и $\overrightarrow{j}$ (см. рисунок). Т. е. базис — это такие два кирпичика, с помощью которых вы можете получить любой вектор на плоскости.



Итак, любой вектор $\overrightarrow{a}$ на плоскости мы можем представить в виде $\overrightarrow{a} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j}$. Числа x и y называются *координатами* (или *проекциями*) вектора. Обычно, когда мы знаем, какой базис на плоскости зафиксирован, координаты вектора на плоскости записывают парой чисел: (x, y), как координаты точек на плоскости. Например, на рисунке ниже векторы $\overrightarrow{a} = (1, 2)$, $\overrightarrow{b} = (-3, 4)$, $\overrightarrow{c} = (-1, -1)$.

Утверждение. Пусть $\overrightarrow{a} = (x_1, y_1)$, $\overrightarrow{b} = (x_2, y_2)$, тогда $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$, т. е. чтобы найти координаты вектора, являющегося суммой двух других векторов, нужно просто покомпонентно сложить их координаты.

Доказательство. Мы знаем по условию, что $\overrightarrow{a} = x_1\overrightarrow{i} + y_1\overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{b} = x_2\overrightarrow{i} + y_2\overrightarrow{j}$. Тогда $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} = x_1\overrightarrow{i} + y_1\overrightarrow{j} + x_2\overrightarrow{i} + y_2\overrightarrow{j} = (x_1 + x_2)x_2\overrightarrow{i} + (y_1 + y_2)\overrightarrow{j}$, т. е. вектор $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$ имеет координаты $(x_1 + x_2, y_1 + y_2)$. $\square$



Пусть точка A имеет координаты (x_0, y_0), а вектор $\overrightarrow{a}$ — координаты (a_x, a_y), тогда конец вектора $\overrightarrow{a}$, приложенного к точке A имеет координаты $(x_0 + a_x, y_0 + a_y)$ — подумайте, почему это так, нарисовав картинку (это очевидно).

Здорово, теперь мы можем чётко и легко описывать перемещения нашего робота по плоскости. Теперь хотелось бы узнать, что могут сказать координаты ещё. Можем ли мы, например, зная на какой вектор сместился робот, понять, какое расстояние он при этом преодолел? Конечно! Пусть наш робот сидел вначале в точке $A(x_1, y_1)$ и потом переместился по прямой в точку $B(x_2, y_2)$. Построим на отрезке AB, как на диагонали, прямоугольник $ACBD$. Легко понять, что $AD = |x_2 - x_1|, AC = |y_1 - y_2|$. Тогда по теореме Пифагора $AB^2 = AD^2 + DB^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$. Стало быть, $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$. Кроме того, отсюда следует (поймите, почему), что $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{AB_x^2 + AB_y^2}$, где через $|\overrightarrow{\cdot}|$ обозначена длина вектора (вместо точки), а через AB_x и AB_y — координаты, т. е. $AB = (AB_x, AB_y)$.

Помимо этого возникает естественный вопрос: как померить угол между векторами, зная их координаты? Чтобы ответить на данный вопрос, нужно знать, что такое

Скалярное произведение

Определение. *Скалярным произведением* двух векторов $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$ называется число

$$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} := |\overrightarrow{a}| \cdot |\overrightarrow{a}| \cos\angle(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}),$$

где $\angle(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})$ — *угол* между ними.

Определение. Базис плоскости, состоящий из векторов $\overrightarrow{i}$ и $\overrightarrow{j}$ называется *ортонормированным*, если векторы $\overrightarrow{i}$ и $\overrightarrow{j}$ перпендикулярны (ортогональны) и длина каждого из них равна 1.

Лемма. Пусть в ортонормированном базисе $\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\}$ вектор $a = (a_x, a_y)$. Тогда $a_x = \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{i}$, а $a_y = \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{j}$.

Доказательство. Координаты вектора — это длины его проекций на соответствующие оси. Их можно найти из соответствующих прямоугольных треугольников по определению косинуса:

$$a_x = |\overrightarrow{a}| \cdot \cos\angle(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{i}) = |\overrightarrow{a}| \cdot |\overrightarrow{i}| \cdot \cos\angle(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{i}) = \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{i},$$

поскольку $|\overrightarrow{i}| = 1$ по определению ортонормированного базиса. Аналогично,

$$a_y = |\overrightarrow{a}| \cdot \cos\angle(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{j}) = |\overrightarrow{a}| \cdot |\overrightarrow{j}| \cdot \cos\angle(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{j}) = \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{j}. \square$$

Установим некоторые свойства скалярного произведения.

Теорема 1. Скалярное произведение обладает следующими свойствами, определяющими его однозначно:

1) $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = \overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{a}$;

2) $(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) \cdot \overrightarrow{c} = \overrightarrow{a}\overrightarrow{c} + \overrightarrow{b}\overrightarrow{c}$;

3) $(k\overrightarrow{a}) \cdot \overrightarrow{b} = k \cdot (\overrightarrow{a}\overrightarrow{b})$;

4) $\overrightarrow{a}\overrightarrow{a} = |\overrightarrow{a}|^2$.

Задача. Используя лемму и определение скалярного произведения, докажите теорему 1.

Т. е., оказывается введённая нами операция на паре векторов ведёт себя почти как колхозное, всем знакомое умножение: оно коммутативно, т. е. от перемены мест множителей произведение не меняется; дистрибутивно, т. е. можно раскрывать скобки при умножении обычным образом.

Теорема 2. Пусть мы имеем два вектора $\overrightarrow{a} = (a_x, a_y)$ и $\overrightarrow{b} = (b_x, b_y)$. Тогда

$$\overrightarrow{a}\overrightarrow{b} = a_x b_x + a_y b_y.$$

Доказательство. Воспользуемся теоремой 1:

$$\overrightarrow{a}\overrightarrow{b} = (a_x\overrightarrow{i} + a_y\overrightarrow{j})(b_x\overrightarrow{i} + b_y\overrightarrow{j}) = a_x\overrightarrow{i}b_x\overrightarrow{i} + a_x\overrightarrow{i}b_y\overrightarrow{j} + a_y\overrightarrow{j}b_x\overrightarrow{i} + a_y\overrightarrow{j}b_y\overrightarrow{j},$$

Заметим, что $\overrightarrow{i}\overrightarrow{i} = |\overrightarrow{i}| \cdot |\overrightarrow{i}| \cos 0^\circ = 1$, $\overrightarrow{j}\overrightarrow{j} = 1$, $\overrightarrow{i}\overrightarrow{j} = |\overrightarrow{i}| \cdot |\overrightarrow{j}| \cos 90^\circ = 0$. Откуда и следует всё, что нужно (убедитесь!).$\square$

В чём прелесть введённого объекта? Она состоит в том, что скалярное произведение мы можем посчитать двумя способами — сначала по определению, затем по теореме, приравнять и найти косинус неизвестного угла:

$$\overrightarrow{a}\overrightarrow{b} = |\overrightarrow{a}| \cdot |\overrightarrow{b}| \cdot \cos\angle(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) = a_x b_x + a_y b_y,$$

$$\cos\angle(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) = \frac{a_x b_x + a_y b_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2}\sqrt{b_x^2 + b_y^2}}.$$

С помощью данной общей теории можно достаточно эффективно решать некоторые математические задачи.

Задачи

1. Пусть $\overrightarrow{a} = (2, -7)$, $\overrightarrow{b} = (-4, 14)$. Параллельны ли векторы?

2. Пусть $\overrightarrow{w} = (-4, 5)$, $\overrightarrow{v} = (5, 6)$. Выразите вектор $\overrightarrow{a} = (1, 1)$ через векторы $\overrightarrow{w}$ и $\overrightarrow{v}$.

3. Найдите длины, скалярное произведение векторов, углы между ними, если они заданы в ортонормированном базисе:

1) $\overrightarrow{a} = (1, 5)$, $\overrightarrow{b} = (-5, 1)$;

2) $\overrightarrow{a} = (0, 1)$, $\overrightarrow{b} = (1, 1)$;

4. Выведите уравнение окружности с центром в точке (x_0, y_0) и радиусом R на плоскости.

5. Докажите, что:

1) $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$;

2) $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha$;

И вычислите $\cos 75°$, $\sin 75°$.

6. Докажите, что $|\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}|^2 + |\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}|^2 = 2(|\overrightarrow{a}|^2 + |\overrightarrow{b}|^2)$.

7. Докажите, что если векторы $\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}$ и $\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}$ перпендикулярны, то $|\overrightarrow{a}| = |\overrightarrow{b}|$.

8. Внутри треугольника ABC взята точка O. Докажите, что

$$S_{BOC}\cdot\overrightarrow{OA} + S_{AOC}\cdot\overrightarrow{OB} + S_{AOB}\cdot\overrightarrow{OC} = 0.$$

9. Пусть A, B, C, D — произвольные точки. Докажите, что $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{BD} = 0$.

Используя эту задачу, докажите, что высоты треугольника пересекаются в одной точке.

10. Докажите, что если диагонали четырёхугольника $ABCD$ перпендикулярны, то и диагонали любого другого четырёхугольника с такими же длинами сторон перпендикулярны.