Векторы, движения и преобразования подобия-2

Векторы также удобно использовать для описания преобразований плоскости — соответствий (отображений), которые ставят взаимно однозначно одним точкам другие так, чтобы выполнялись некоторые дополнительные условия. Рассмотрим вначале преобразования, которые сохраняют расстояния между точками — *движения.*

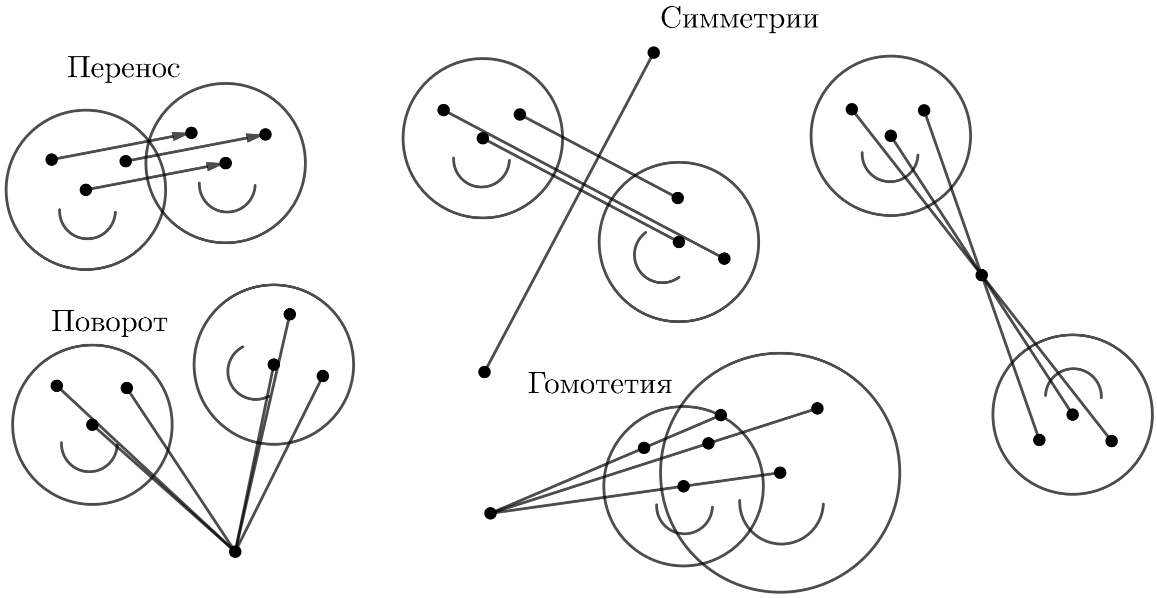
Определим следующие важные объекты:

(1) *Параллельный перенос на вектор* $\overrightarrow{a}$. Он переводит каждую точку плоскости A в новую точку $A' = A + \overrightarrow{a}$, которая получается из предыдущей смещением на вектор $\overrightarrow{a}$. Соответственно, при параллельном переносе фигуры каждая её точка подвергается такому смещению и, в результате, переползает, как твёрдое тело.

(2) *Поворот относительно точки O на угол α.* Он переводит точку A в новую точку A', получающуюся из A следующим образом: построим окружность с центром в точке O и радиусом OA и отметим на ней точку A' так, чтобы угол $A'OA$, отсчитываемый (для определённости) против часовой стрелки, был равен α. Это обычный, знакомый каждому поворот.

(3) *Симметрия относительно точки O.* Она переводит точку A в точку A', такую, что $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OA'}$.

(4) *Симметрия относительно прямой ℓ.* Рассмотрим снова точку A и проведём через неё прямую m, перпендикулярную ℓ и пересекающую её в точке O. Тогда образом A будет служить точка A', симметричная точке A относительно O.



Движение — это преобразование плоскости, являющееся одним композицией каких-то преобразований **(1)**–**(4)** (в частности, сами преобразования **(1)**–**(4)** являются движениями плоскости).

В сущности, с помощью данных преобразований мы можем, как твёрдое тело, перемещать нашу фигуру, крутить, переворачивать. В процессе данных манипуляций мы не изменяем нашу фигуру. Рассмотрим теперь преобразования, нарушающие последнее свойство, но не слишком сильно, а именно: разрешим масштабирование. Уточним, что имеется ввиду.

Гомотетией относительно точки O с коэффициентом k называется преобразование, ставящее в соответствие данной точке A точку A', так, чтобы $\overrightarrow{OA} = k \cdot \overrightarrow{OA'}$. Видно, что при $k = 1$ мы получаем симметрию относительно точки O.

Теперь мы в состоянии дать определение подобных фигур на плоскости. Две фигуры на плоскости называются *подобными*, если существует композиция движения и гомотетии, переводящая одну фигуру в другую. Это естественное определение: скажем, если вы смогли так порастягивать, подвигать, покрутить, попереворачивать первую фигуру и получить вторую, то тогда эти фигуры подобны. Разумеется, данное определение согласуется в частном случае треугольников (попробуйте это доказать). Соответствующее преобразование называется *преобразованием подобия*.

Некоторые геометрические задачи решаются красиво и быстро с помощью преобразований.

Задачи

1. Для каких-нибудь (любых) двух из **(1)–(4)** движений докажите, что они сохраняют расстояние между любыми между точками и углы между любыми отрезками. Что будет образом окружности при движении?

2. Внутри параллелограмма $ABCD$ взята точка O так, что $\angle OAD = \angle OCD$. Докажите, что $\angle OBC = \angle ODC$.

3. Докажите, что при гомотетии сохраняются углы между прямыми и отношения, в которых точки делят отрезки.

4. Докажите, что точка пересечения медиан M, точка пересечения высот H (*ортоцентр*) и центр поисанной окружности O лежат на одной прямой, причём $OM : MH = 1 : 2$.

5. На плоскости лежат два квадрата (необязательно равных): $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$.Обозначим через K, L, M, N середины отрезков AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 соответственно. Тогда $KLMN$ — квадрат. Докажите это.

6. Докажите, что композиция двух симметрий относительно прямых — это поворот или параллельный перенос.

7. На сторонах BC и CD квадрата $ABCD$ взяты точки M и K соответственно, причём $\angle BAM = \angle MAK$. Докажите, что $BM+KD = AK$.

8. На сторонах треугольника ABC внешним образом построены правильные треугольники A_1BC, AB_1C и ABC_1.

1) Докажите, что $AA_1 = BB_1 = CC_1$.

2) Докажите, что прямые, проходящие через эти отрезки пересекаются в одной точке.

9. Точка M лежит на дуге AB описанной окружности правильного треугольника ABC. Докажите, что $MC = MA + MB$.

10. Докажите, что точка пересечения диагоналей, боковых сторон, середины оснований трапеции лежат на одной прямой.