

Простейшие свойства функций и функциональные уравнения

1. Решите уравнение:

$$x^{2019} - \sqrt[2018]{1 - \sqrt[2019]{x}} + \sqrt[2018]{x} + \sin x + 1 = 0.$$

2. Найдите все функции $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$, такие, что

$$(x - 1) \cdot f\left(\frac{x + 1}{x - 1}\right) - f(x) = x.$$

3. Функция $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ такова, что $x + f(x) = f(f(x))$. Найдите все корни уравнения

$$f(f(x)) = 0.$$

4. Для каких α существует функция $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, отличная от константы, такая, что

$$f(\alpha(x + y)) = f(x) + f(y)?$$

5. Функция $f(x)$, определённая при всех действительных x , является чётной (т. е. $f(-x) = f(x)$). Кроме того, при любом действительном x

$$f(x) + f(10 - x) = 4.$$

a. Приведите пример такой функции.

b. Докажите, что любая такая функция является периодической (т. е. $f(x + T) = f(x)$ для любого x и фиксированного T — периода).

Простейшие свойства функций и функциональные уравнения

1. Решите уравнение:

$$x^{2019} - \sqrt[2018]{1 - \sqrt[2019]{x}} + \sqrt[2018]{x} + \sin x + 1 = 0.$$

2. Найдите все функции $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$, такие, что

$$(x - 1) \cdot f\left(\frac{x + 1}{x - 1}\right) - f(x) = x.$$

3. Функция $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ такова, что $x + f(x) = f(f(x))$. Найдите все корни уравнения

$$f(f(x)) = 0.$$

4. Для каких α существует функция $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, отличная от константы, такая, что

$$f(\alpha(x + y)) = f(x) + f(y)?$$

5. Функция $f(x)$, определённая при всех действительных x , является чётной (т. е. $f(-x) = f(x)$). Кроме того, при любом действительном x

$$f(x) + f(10 - x) = 4.$$

a. Приведите пример такой функции.

b. Докажите, что любая такая функция является периодической (т. е. $f(x + T) = f(x)$ для любого x и фиксированного T — периода).