Элементы топологии

Определение. Два подмножества плоскости или пространства называются *гомеоморфными*, если между ними существует непрерывное взаимно-однозначное отображение, такое, что и обратное отображение тоже непрерывно. Это отображение называется *гомеоморфизмом*.

На практике, чтобы построить гомеоморфизм (если он существует), достаточно указать как точки первого множества переходят в точки второго, причём близкие точки должны переходить в близкие точки, как в одном направлении, так и в другом. Если отображение слишком хитрое, то пишут ещё и формулу, задающую этот гомеоморфизм.

Рассмотрим пример. Окружность с выколотой точкой гомеомеоморфна действительной прямой $\mathbb{R}$. Доказательство изображено на картинке.

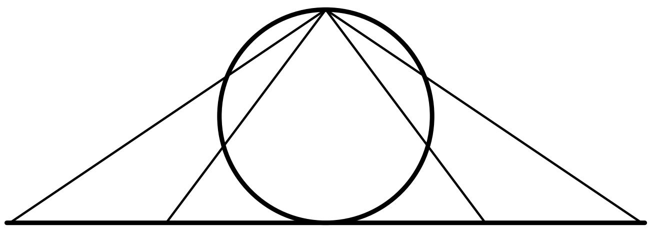

Рис. 1: к доказательству

1. Выпишите явную формулу для гомеорфизма окружности без точки на прямую. *Указание: отобразитесь, например, из* $\{x^2+(y-1)^2=1\}\setminus\{(0,2)\}$ *— окружности без северного полюса — в прямую* $\{(x,0)\}$, *т. е. поймите, куда перейдёт точка* (x,y) *при таком отображении.*

2. Докажите, что все отрезки гомеоморфны между собой.

3. Докажите, что все эллипсы гомеоморфны между собой — это окружности $\mathbb{S}^1$. Эллипс — это $\{(x,y) \mid \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\}$ для некоторых $a,b\neq 0$.

4. Докажите, что выпуклый многоугольник гомеоморфен окружности.

5. Докажите, что куб и сфера $\mathbb{S}^2$ гомеоморфны.

   Определение. *Выпуклый многогранник* с вершинами в точках $v_1,\ldots,v_n$ — это выпуклая оболочка точек $v_1,\ldots,v_n$, т. е. наименьшее (по включению) выпуклое множество, содержащее точки $v_1,\ldots,v_n$.

   Например, если мы возьмём любые 4 точки, не лежащие в одной плоскости, то выпуклая оболочка, натянутая на них, даст нам тетраэдр (треугольную пирамиду).

6. Докажите, что любой выпуклый многогранник гомеоморфен двумерной сфере $\mathbb{S}^2$.

А есть ли негомеоморфные множества? Конечно, но доказать их негомеомофрность порой очень трудно. В частности, для этой цели были придуманы гомологии, когомологии, гомотопические группы. Но иногда срабатывают и более простые соображения.

При гомеоморфизме должна сохраняться *связяность*. Связность — это вот что: если вы из любой точки вашего множества можете пройти по некоторой кривой, лежащей в вашем множестве до любой другой точки, то такое множество называется связным. Это обобщение понятия связного графа. При гомеомрфизмах вы «мнёте» множество без разрывов и склеек, поэтому если изначально вы могли добраться из любой точки в любую другую, то и после того, как вы «помнёте», это свойство не нарушится. Связные куски, на которые распадается множество называются компонентами связности. Соответственно, если у двух множеств разное число компонент связности, то они уже не могут быть гомеоморфными.

Рассмотрим такой пример. Первое множество — это три отрезка с общим началом. А второе — обычный отрезок. Они не гомеоморфны. Действительно, выколем общую точку трёх отрезков в первом множестве, а во втором множестве — любую точку. После этого, первое множество распадётся на три несвязных куска, а второе — будет состоять по-прежнему из одного связного куска.

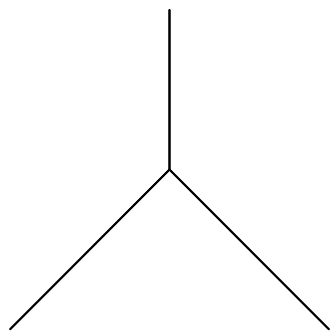

Рис. 2: пример с отрезками

7. Какие из следующих букв гомеоморфны: A, O, P, R, G, S, Z, Q, H, K, B?

Познакомимся с ещё одним инструментом — фундаментальной группой $\pi_1(X)$ множества X. Представьте себе поверхность, на которой отметили точку x_0. Из x_0 выпускаются всевозможные петли. Две такие петли мы не будем различать, если одну из них можно непрерывно проедфермировать в другую — их мы будем называть *гомотопными*. Мы получаем множество $\pi_1(X)$ петель с таким отождествлением. Теперь определим на этом множестве операцию произведения этих петель: пусть γ_1 и γ_2 — петли из $\pi_1(X)$, тогда их произведение $\gamma_1\gamma_2$ — это петля γ, такая, что мы сначала идём по петле γ_1, возвращаемся в точку x_0, а затем — по γ_2. Относительно этой операции множество $\pi_1(X)$ становится группой, т. е.

1) есть нейтральный элемент 1 — точечная петля: $1 \cdot \gamma = \gamma \cdot 1 = \gamma$,

2) ассоциативность: $\gamma_1(\gamma_2\gamma_3) = (\gamma_1\gamma_2)\gamma_3$,

3) есть обратный элемент γ^{-1} для любого $\gamma \in \pi_1(X)$: $\gamma \cdot \gamma^{-1} = \gamma^{-1}\gamma = 1$.

У гомеоморфных поверхностей фундаментальные группы одинаковы (изоморфны).

Пример. В двумерном диске $\mathbb{D}^2$ (это обычный круг) любая петля стягивается в точку, поэтому $\pi_1(\mathbb{D}^2) = \{1\}$ — тривиальная группа из одной единицы.

8. Поймите, какая фундаментальная группа у окружности.

9. Найдите $\pi_1(R)$, где R — круговое кольцо.

10. Найдите фундаментальную группу плоскости с выколотой точкой.

11. Докажите, что сфера и плоскость не гомеоморфны.

12. Докажите, что трёхмерное пространство не гомеоморфно двумерному.

13. Покажите стрелками, как нужно склеить стороны квадрата, чтобы получить тор (бублик).

14. Покажите стрелками, как нужно склеить стороны правильного восьмиугольника, чтобы получить крендель.

15. Как склейкой из некоторого многоугольника получить поверхность на рисунке? А если дырок будет g?

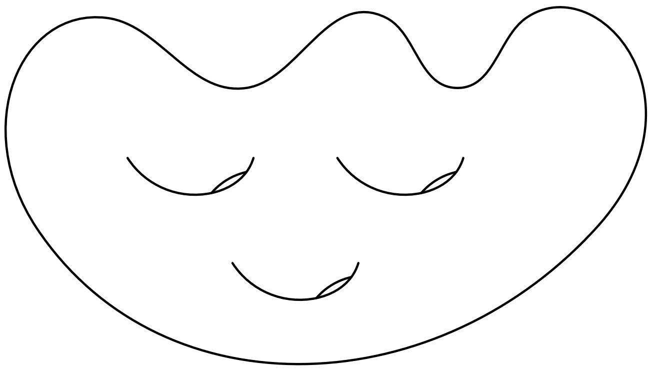

Рис. 3: сфера с тремя ручками

Ещё одним инвариантом поверхности M служит её эйлерова характеристика $\chi(M)$, для определения которой нужно разбить поверхность на треугольники и посчитать сумму $v - e + f$, где v — число вершин триангуляции, e — число рёбер, f — число треугольников.

16. Докажите, что сфера, тор, крендель и поверхность с тремя дырами на рисунке (это сфера с тремя ручками) не гомеоморфны.

17. Докажите, что эйлерова характеристика не зависит от разбиения поверхности на треугольники.

Определение. *Эйлеровой характеристикой* многогранника называется число $v-e+f$, где v — число вершин многогранника, e — число рёбер, а f — число его граней.

18. Найдите эйлерову характеристику выпуклого многогранника.