0.1 Всякие графы

1. В тесте принимают участие 25 человек. Он состоит из нескольких вопросов, на каждый из которых можно дать один из пяти вариантов ответа. Оказалось, что любые два человека не более чем на один вопрос ответили одинаково. Докажите, что в тесте было не больше 6 вопросов.

2. Какое наименьшее число выстрелов надо сделать, чтобы гарантированно подбить четырехпалубный корабль на поле 10×10 для игры в морской бой?

3. В некоторой стране имеется n городов. Между любыми (не менее тремя) городами имеется кольцевой автомобильный маршрут. Докажите, что число дорог в стране не меньше $\frac{n(n-2)}{2}$.

4. В ряд стоит 2018 книг по геометрии. За один ход разрешается взять четыре подряд идущие книги и переставить их в обратном порядке. Можно ли такими операциями переставить все книги в обратном порядке?

5. Рассматриваются несамопересекающиеся замкнутые ломаные с вершинами на некоторых сторонах (но не в узлах) бесконечной квадратной решётки. Любые два звена ломаной лежат в разных квадратах решётки и могут иметь лишь одну общую точку. Существует ли такая ломаная с нечётным числом звеньев?

6. Есть два ожерелья, в каждом ожерелье по 100 чёрных и 100 белых бусинок. Аня хочет приложить второе ожерелье к первому (разрешается поворачивать и переворачивать ожерелье) так, чтобы как можно больше бусинок совпало по цвету. Докажите, что Аня гарантированно сможет совместить 9 бусин.

0.2 2-адическая норма

Любое ненулевое рациональное число можно единственным образом представить в виде $2^\alpha \cdot \frac{m}{n}$, где $(m, n) = 1$ (m и n взаимно просты). Два-адической нормой рационального числа q называется при $q \neq 0$ называется число $2^{-\alpha}$. Будем обозначать 2-адическую норму так: $\|\cdot\|$ Определим также 2-адическое расстояние между рациональными числами q_1 и q_2 $d(q_1, q_2) = \|q_1 - q_2\|$.

1. Докажите, что если в «стране рациональных чисел» расстояние между её обитателями мерить при помощи 2-адического, то получится, что все треугольники в ней будут равнобедренными. (Иными словами, докажите, что $d(x, y) \leqslant \max(d(x, z), d(y, z)))$.

Следствие. (из задачи) Если $\|a\| \geqslant \|b\|$, то $\|a + b\| = \|a\|$.

Назовём *2-адическим кругом* с центром в точке a и радиуса R подмножество рациональных чисел, отстоящих в смысле 2-адического расстояния на не больше, чем R.

2. Докажите, что если два 2-адических круга пересекаются, то тогда один из них содержится в другом.

3. Докажите, что любой 2-адический круг содержит бесконечно много различных (т. е. с разными центрами) 2-адических кругов того же радиуса.

4. Докажите, что

a) $\|ab\| = \|a\| \, \|b\|$;

b) $\|-a\| = \|a\|$;

c) если $\|a\| \neq \|b\|$, то $\|a - b\| = \|a + b\|$.

5. Каждая вершина квадрата покрашена одним из трёх цветов, причём все три цвета присутствуют. Квадрат как-то тринагулировали, и каждую вершину тоже покрасили одним из трёх цветов, так, чтобы ни на каком отрезке не лежали точки трёх разных цветов. Докажите, что тогда найдётся треугольник, вершины которого покрашены тремя разными цветами.

6. Квадрат разрезали на конечное число треугольников равной площади. Докажите, что число этих треугольников всегда чётно.

0.3 Неравенства

⋆ Неравенства Коши

$$\frac{n}{\dfrac{1}{a_1}+...+\dfrac{1}{a_n}} \leqslant \sqrt[n]{a_1...a_n} \leqslant \frac{a_1+...+a_n}{n} \leqslant \sqrt{\frac{a_1^2+...+a_n^2}{n}},$$

справедливое для неотрицательных чисел. Равенство достигается только в случае равенства всех чисел: $a_1 = ... = a_n$.

Гармоническое $\leqslant$ Геометрическое $\leqslant$ Арифметическое $\leqslant$ Квадратическое

⋆ Неравенство Коши-Буняковского-Шварца (КБШ)

$$|(a,b)| \leqslant |a| \cdot |b|,$$

$$a_1b_1 + ...a_nb_n \leqslant \sqrt{a_1^2+...+a_n^2}\sqrt{b_1^2+...+b_n^2},$$

где $a = (a_1, ..., a_n)$, $b = (b_1, ..., b_n)$ — произвольные n-мерные действительные векторы. Равенство достигается лишь в случае, когда векторы a и b коллинеарны: $a = \lambda b$.

1. Выведите неравенство между средним квадратическим и средним арифметическим через КБШ.

2. Обозначим $G = \sqrt[n]{a_1...a_n}$. Пусть $a_1 \geqslant a_2 \geqslant ... \geqslant a_n$. Рассмотрим числа $x_j = \dfrac{a_1 \cdot ... \cdot a_j}{G^j}$ и $y_j = \dfrac{1}{x_j}$. С помощью транснеравенства докажите в этом случае неравенство между средним арифметическим и геометрическим. Почему из рассмотренного частного случая следует, что неравенство верно всегда?

3. Две стенки ящика, имеющего форму прямоугольного параллелепипеда и объём 1, изготавливаются из одного материала, а четыре другие — из материала, который стоит в 8 раз меньше. При каких размерах ящика стоимость материалов, нужных для его изготовления, минимальна?

4. Даны положительные числа a, b, c, d. Найдите наименьшее значение выражения

$$\left(\frac{a+b}{c}\right)^4 + \left(\frac{b+c}{d}\right)^4 + \left(\frac{c+d}{a}\right)^4 + \left(\frac{d+a}{b}\right)^4.$$

5. Рассмотрим кубический трёхчлен $x^3 + ax + b$, у которого $b < 0$. Может ли он иметь три попарно различных положительных корня?

6. Докажите сваливанием кирпичей следующие неравенства для неотрицательных переменных:

а) $x^4y^2z + x^4z^2y + y^4x^2z + y^4z^2x + z^4x^2y + z^4y^2x \geqslant 2(x^3y^2z^2 + y^3z^2x^2 + z^3x^2y^2)$;

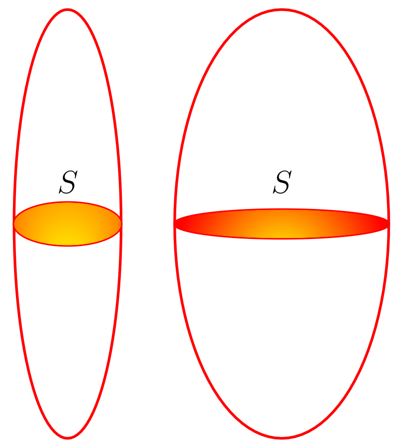
b) $x^5 + y^5 + z^5 \geqslant x^2y^2z + y^2z^2x^2 + z^2x^2y$.

7. Положительные числа x, y и z удовлетворяют условию $xyz \geqslant xy + yz + xz$. Докажите, что тогда $\sqrt{xyz} \geqslant \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}$.

8. Неравенство между средним арифметическим и геометрическим можно доказать геометрически, с помощью объёма.

0.4 Принцип Кавальери

Будем считать по определению, что объём единичного куба равен 1. Принцип Кавальери состоит в следующем: *если параллельное семейство плоскостей пересекает два тела по равновеликим фигурам, то тела имеют равные объёмы*. Рассмотрим принцип Кавальери, как аксиому, определяющую объём.



1. Докажите, что объём прямоугольного параллелепипеда равен понятно чему. Докажите, что объём треугольной призмы равен произведению площади основания на высоту.

2. Найдите объём n-угольной (необязательно прямоугольной) призмы.

3. Чему равен объём цилиндра (необязательно прямоугольного)?

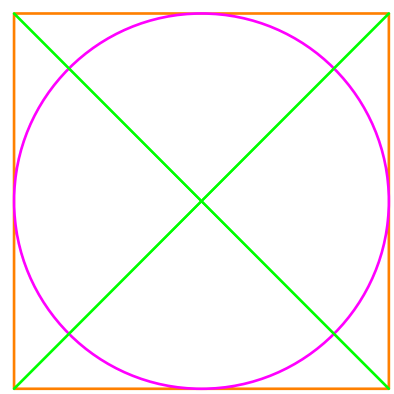
4. Докажите, что две треугольные пирамиды, имеющие одинаковые площади оснований и равные высоты, имеют одинаковый объём.

5. Рассмотрев треугольную призму, докажите, что объём тетраэдра равен трети произведения основания на высоту, проведённую к нему.

6. Чему равен объём произвольной пирамиды?

7. Чему равен объём конуса?

8. Рассмотрим квадрат с проведёнными диагоналями и вписанной в него окружностью. Квадрат повращали вокруг оси, параллельной паре из его сторон. В результате образовался цилиндр, конус и сфера. Оказывается, объём цилиндра равен сумме объёмов остальных тел. Докажите это и найдите формулу для объёма шара радиуса R. (*Доказательство Архимеда*).



9. Зная, что площадь эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leqslant 1$ равна πab, найдите объём эллипсоида:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leqslant 1,$$

где $a, b, c > 0$.

0.5 Практикум по комплексным числам

Напомню, что комплексным числом называется выражение $a+bi$, где a, $b \in \mathbb{R}$, $i^2 = -1$. Такие числа складываются покомпонентно: мнимая часть (что содержит i) складывается с мнимой, вещественная — с вещественной. Умножение такое же обычное, как если бы i была переменной (не забудьте, что $i^2 = -1$). У комплексного числа есть *тригонометрическая форма*: $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, где $r \geqslant 0$, которая автоматически получается, если рассматривать комплексные числа, как векторы на плоскости. Она удобна для умножения и деления комплексных чисел. Легко устанавливается *формула Муавра*: $z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$. Напомню также некоторые кусочки из тригонометрии: косинус — абсцисса точка поворота едининой окружности, синус — ордината, 1 радиан равен центральному углу, который стягивает дугу длины 1 единичной окружности, $\sin(x\pm y) = \sin x\cos y \pm \sin y\cos x$, $\cos(x\pm y) = \cos x\cos y \mp \sin x\sin y$.

1. Докажите, что $C_n^0 - C_n^2 + C_n^4 - ... = 2^{\frac{n}{2}}\cos\frac{\pi n}{4}$.

2. Докажите, что многочлен $x^{44} + x^{33} + x^{22} + x^{11} + 1$ делится на $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$.

3. Докажите, что если $z_0 = a + bi$ — корень многочлена с вещественными коэффициентами, то $\overline{z_0} = a - bi$ — тоже корень этого многочлена.

4. Правильный n–угольник вписан в единичную окружность. Докажите, что сумма квадратов всех сторон и всех диагоналей равна n^2.

0.6 И снова многочлены

1. Найдите такой многочлен $P(x)$, что $P(a_1) = b_1$, $P(a_2) = b_2$, $P(a_3) = b_3$, $P(a_4) = b_4$. Какова наименьшая степень $P(x)$? Обобщите эту задачу.

2. Докажите, что для любых попарно различных a, b, c имеет место соотношение:

$$\frac{a(1-b)(1-c)}{(a-b)(a-c)} + \frac{b(1-a)(1-c)}{(b-a)(b-c)} + \frac{c(1-a)(1-b)}{(c-a)(c-b)} = 1.$$

3. Докажите, что многочлен $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x - 1$, где $a_i > 0$, имеет не более одного положительного корня.

4. Рассмотрим многочлен $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_0$. Пусть в последовательности его коэффициентов $a_0, ..., a_n$ имеется N перемен знака (т. е. N ситуаций $+-$ или $-+$). Например, в последовательности $1, -2, 3, 4, -5, -6, 2$ имеется 4 перемены знака. Докажите, что число положительных корней многочлена не превосходит N. (*Правило знаков Декарта*).

5. Какое наибольшее число отрицательных корней может иметь многочлен

$$ax^4 - bx^3 + cx^2 - dx + e,$$

где $a, b, c, d, e > 0$?

0.7 Правильные многогранники

Правильным многогранником называется многогранник, у которого все грани — одинаковые правильные многоугольники, причём в каждой вершине сходится одинаковое число граней. Очевидно, куб, правильная пирамида и правильный октаэдр обладают такими свойствами. Оказывается, существуют ещё два правильных многогранника.

1. Найдите все правильные многогранники с треугольными гранями.

2. Найдите все правильные многогранники с четырёхугольными гранями.

3. Найдите все правильные многогранники с пятиугольными гранями.

4. Докажите, что других правильных многогранников не существует.

5. Сколько вершин, граней и рёбер у каждого правильного многогранника?

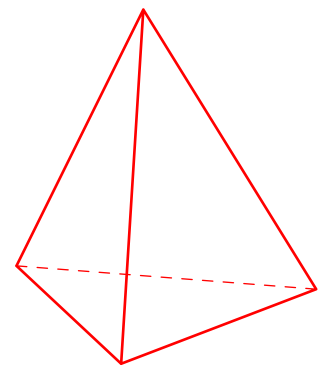
6. Докажите, что правильный икосаэдр существует.

7. Докажите, что правильный додекаэдр существует.

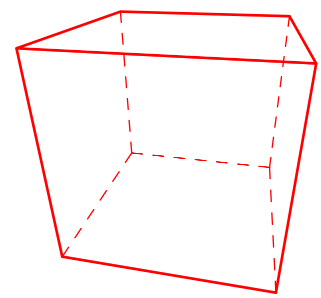
8. Найдите отношение радиуса описанной сферы к длине ребра икосаэдра.

9. Найдите объём икосаэдра с ребром a.

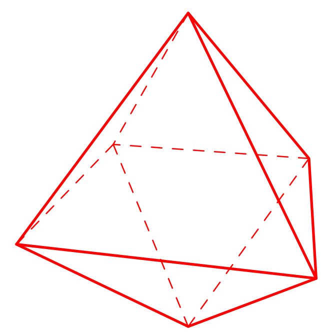
10. Решите последние две задачи для додекаэдра.



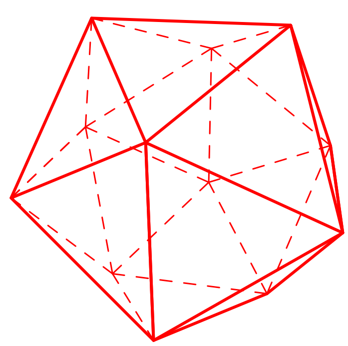
Тетраэдр



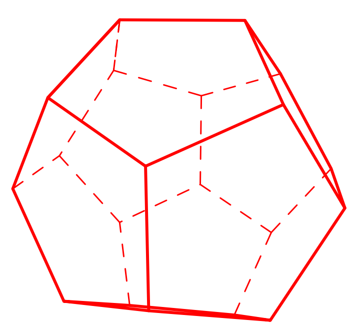
Куб



Откаэдр



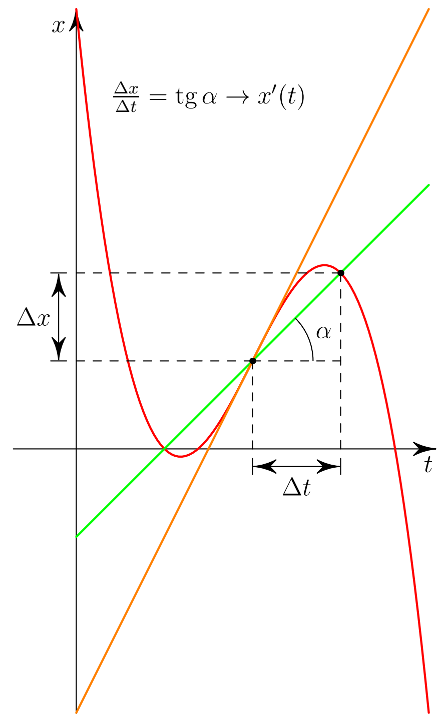
Икосаэдр



Додекаэдр

0.8 Первые сведения о производной функции

Если тело движется прямолинейно по закону $x(t) = x_0 + vt$, то всем известно, что v — это скорость, и она может быть найдена через отношение пройденного пути ко времени. Это определение корректно, поскольку v постоянна и является ничем иным, как угловым коэффициентом прямой $x(t)$ на координатной плоскости (x, t). Если же разрешить телу перемещаться по нелинейному закону, то старое определение скорости будет выглядеть странно: допустим, что тело движется по закону $x(t) = t^2 - t$, тогда его «сельская скорость» на промежутке времени $[0, 1]$ будет равна $\frac{x(1)-x(0)}{1-0} = 0$, но тело не стояло на месте! Ясно, что в общем случае имеет смысл только скорость в точке. Что это такое? Допустим, что мы хотим узнать скорость в момент времени $t = t_0$. Модернизируем «сельское» определение скорости, рассмотрев промежуток $[t_0, t_0 + \Delta t]$ при маленьком Δt. На таком промежутке, если $x(t)$ достаточно хорошая, её можно считать отрезком прямой — касательной и положить $v(t_0) \approx \frac{x(t_0+\Delta t)-x(t_0)}{\Delta t}$. Чем меньше значение Δt, тем точнее $v(t_0)$. В этом случае пишут: $v(t) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{x(t_0+\Delta t)-x(t_0)}{\Delta t}$. В общем случае, для функции $f(x)$ указанный предел (если он существует) называется *производной* $f'(x)$ — это скорость изменения функции в точке x.



Скорость — это угловой коэффициент касательной

1. Тело движется по закону $x(t) = t^2$. Найдите зависимость его скорости от времени.

2. Найдите $(x^n)'$ для любого натурального n. Чему равна производная постоянной функции (константы)?

3. Рассмотрев подходящую механическую модель движения материальной точки, найдите производные синуса и косинуса.

Функция $f(x)$ имеет производную в точке $x \Leftrightarrow$

$$f(x + \Delta x) = f(x)\Delta x + \alpha(\Delta x),$$

где $\alpha(\Delta x)$ — некоторая функция, которую можно сделать меньше любого положительного числа, взяв подходящий отрезок, на котором может колебаться Δx.

4. Докажите, что

a. $(af + bg)' = af' + bg'$, где $a, b \in \mathbb{R}$;

b. $(fg)' = f'g + fg'$.

5. Найдите $\left(\frac{1}{x}\right)'$ и обобщите задачу **2.** для произвольного целого n.

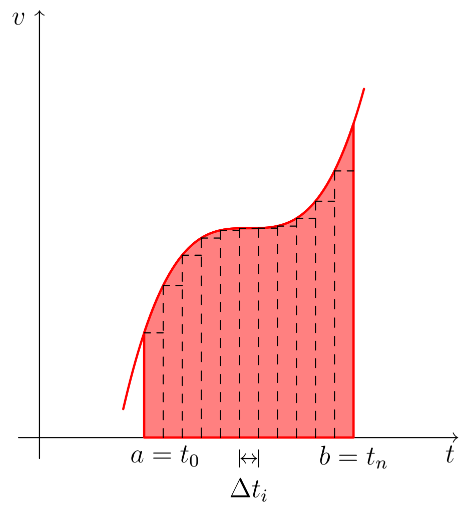
6. Вычислите приближённо $\sin 31°$.

7. Напишите уравнение касательной к параболе $y = ax^2 + bx + c, a \neq 0$.

8. Верно ли, что касательная пересекает график функции ровно в одной точке?

0.9 Площадь и интеграл

Если известна зависимость скорости от времени $v(t)$, то естественно задаться вопросом, какое расстояние оно пройдёт через время t_0 после старта. В случае, когда скорость $v(t) = v_0$ постоянна, ответ очевиден: $v_0 t$ — по определению скорости. Заметим, что в этом случае график $v(t) = v_0$ — горизонтальная прямая, а путь — это площадь соответствующего прямоугольника. В случае, когда движение устроено более сложно, и $v(t)$ — некоторая кривая, всё сводится к вычислению площади «криволинейной трапеции». Чтобы найти её можно, например, для заданного n разбить фигуру на n полосочек, содержащихся внутри фигуры, затем полученное выражение рассмотреть при больших n. Это площадь называется интегралом $v(t)$ от 0 до t_0 и обозначается так: $\int\limits_0^t v(t)dt$,



Площадь под $v(t)$ — это перемещение

1. Докажите, что сумму квадратов натуральных чисел от 1 до n можно представить в виде многочлена от n.

2. Тело движется по закону $v(t) = t^2$. Какое расстояние оно пройдёт за 1 с?

3. Докажите, что отношение площади круга к квадрату его радиуса — константа, не зависящая от радиуса. Докажите, что та же константа участвует и в нахождении длины окружности.

4. Найдите площадь эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leqslant 1$ (с полуосями a и b).

   Теорема. (Лагранж) Если функция $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ достаточно хорошая, то найдётся такая точка $\xi \in [a, b]$, что касательная, проведённая в точке $(\xi, f(\xi))$ к графику функции f, будет параллельная хорде с концами $(a, f(a)), (b, f(b))$.

5. Переформулируйте теорему Лагранжа в виде равенства, связывающего числа a, b и ξ.

6. Рассмотрим достаточно хорошую функцию $f(x)$, для которой существует такая функция $F(x)$, что $F'(x) = f(x)$. Докажите *формулу Ньютона-Лейбница*:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

7. В космосе летит астероид массой m приблизительно вдоль прямой. Спутники вычислили закон движения тела $x(t) = t^7 + 2t^5$. Какую работу совершил астероид в течение первой секунды после начала наблюдения?

8. Чайник работает от сети переменного тока с напряжением (в вольтах) $u(t) = 220\sqrt{2}\sin(100\pi t)$. Через какое время закипит чайник с 1 литром воды при температуре 21°C? Сопротивление нагревательной спирали чайника 24 Ом.

0.10 Геометрия сферы и астрономия

1. Древние египтяне заметили, что во время летнего солнцестояния Солнце освещает дно глубоких колодцев в Сиене (ныне Асуан), а в Александрии — нет. В день летнего солнцестояния в Александрии 19 июня 240 года до н.э.