Уравнения, разрешимые в радикалах

Вся история решения уравнений 3-й и 4-й степени связана с Италией. Формулу для решения уравнения 3-й степени открыл Сципион дель Ферро (1465-1526), но он хранил свои результаты в тайне. В 1536 г. эту формулу переоткрыл Николло Тарталья (1500-1557), готовясь к математическому поединку. После долгих уговоров и клятв хранить всё в тайне Джероламо Карадно выведал у Таральи приёмы решения кубических уравнений. Карадано нарушил клятву, опубликовав способ решения кубических уравнений в своей книге по алгебре «Ars magna» («Великое искусство»). Кардано писал, что этот способ он узнал от Тартальи и из бумаг дель Ферро. Тарталья, узнав о появлении книги, едва не сошёл с ума от гнева и начал яростную полемику с Кардано. Помимо решения кубических уравнений книга «Ars magna» содержала решение уравнений 4-й степени, полученное Людовико Феррари, учеником Кардано.

Долгие поиски решения уравнения 5-й степени не привели к успеху. В 1799 г. итальянский врач и математик Паоло Руффини опубликовал доказательство неразрешимости уравнения 5-й степени, но в этом доказательстве был серьёзный пробел. Полное доказательство неразрешимости уравнения 5-й степени независимо от Руффини получил в 1824 г. молодой норвежский математик Нильс Абель. А затем Эварист Галуа разработал теорию, позволяющиую для каждого конкретного уравнения выяснить, разрешимо ли оно в радикалах.

1. Найдите корень многочлена $x^3 + 3x - 4$ по формуле Кардано. Иррационален ли он?

2. Докажите, что если дискриминант кубического трёхчлена равен нулю, то трёхчлен имеет кратный корень.

3. Числа p и q таковы, что каждый из многочленов $x^3 + px + q$ и $x^3 + qx + p$ имеет по три корня. Какие значения могут принимать p и q?

4. Докажите, что уравнение $x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_n = 0$ можно привести к виду $y^n + b_2y + ... + b_n = 0$ с помощью замены $y = x + c$, где c — некоторое число (найдите это c).

5. Решите общее уравнение (ну, или найдите хотя бы один корень) четвёртой степени $x^4 + ax^3 + bx + c$, представив многочлен в левой части в виде разности квадратов двух многочленов. (*Не обязательно решать эту задачу в общности: возьмите какие-нибудь конкретные значения коэффициентов и попытайтесь проделать это*).

6. Пусть x_1, x_2, x_3, x_4 — корни многочлена $x^4 + ax^2 + bx + c$. Положим $\alpha = -(x_1 + x_2)(x_3 + x_4)$, $\beta = -(x_1 + x_3)(x_2 + x_4)$ и $\gamma = -(x_1 + x_4)(x_2 + x_3)$.

а) Выразите x_1, x_2, x_3, x_4 через $\sqrt{\alpha}, \sqrt{\beta}, \sqrt{\gamma}$.

б) Выразите коэффициенты многочлена $(y - \alpha)(y - \beta)(y - \gamma)$ через a, b, c.

в) Сведите решение уравнения $x^4 + ax^2 + bx + c = 0$ к решению кубического уравнения.