Непрерывные функции

Определение 1. Функция $f(x)$, такая, что для любого положительного числа ε найдётся такое $\delta > 0$, что из того, что $|x-x_0| < \delta$ следует, что $|f(x)-f(x_0)| < \varepsilon$, называется *непрерывной в точке* x_0.

Определение 2. Функция, непрерывная в каждой точке своей области определения, называется *непрерывной*.

Теорема. Пусть $f(x)$ – непрерывная на $[a,\ b]$ функция и, кроме того, она принимает на концах отрезка значения разных знаков (т. е. $f(a)f(b) < 0$). Тогда $f(x)$ имеет хотя бы один корень на $[a,\ b]$.

Следствие. Пусть $f(a) = A$, $f(b) = B$, где f — функция из условия предыдущей теоремы. Пусть для определённости $A \leqslant B$. Тогда $f(x)$ принимает все значения между A и B.

На самом деле, непрерывность можно определить и на функциях двух переменных $f(x,\ y)$, действующих из плоскости в множество действительных чисел (например, $f(x,\ y) = x + y + xy$). Для непрерывных функций, заданных на многоугольных (выпуклых областях) также верны и теорема, и следствие (с заменой отрезка на многоугольную область).

1. Выведите следствие из теоремы.

2. Докажите, что для любого неотрицательного целого n функция $f(x) = x^n$ непрерывна на $\mathbb{R}$.

3. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на отрезке $[a,\ b]$.

- **a.** Докажите, что их сумма $f(x) + g(x)$ — непрерывная функция.
- **b.** Их произведение $f(x)g(x)$ — непрерывная функция.

4. Докажите, что многочлен — это непрерывная функция на $\mathbb{R}$.

5. Пусть непрерывная функция $f(x)$ не равна нулю на отрезке. Докажите, что тогда функция $\frac{1}{f(x)}$ — тоже непрерывна на том же отрезке.

6. Существует ли такая функция, что любая прямая на плоскости пересекает эту функцию?

7. Докажите, что любой выпуклый многоугольник на плоскости можно поделить одним прямолинейным разрезом на два многоугольных куска равной площади.

8. Докажите, что любой выпуклый многоугольник на плоскости можно поделить прямолинейным разрезом на два многоугольных куска с равными площадями и равными периметрами. [Это усиление предыдущей задачи].

9. На сковороде лежат два выпуклых (многоугольных) блина. Докажите, что повар может одним прямолинейным разрезом рассечь и первый, и второй блин пополам одновременно.

10. Пусть f — непрерывная функция на отрезке, для которой уравнение $f(x) = x$ не имеет вещественных решений. Докажите, что уравнение $f(f(x)) = x$ тоже не имеет вещественных решений.

11. На отрезке $[0,\ 1]$ выбрано n чисел $x_1, ..., x_n$. Докажите, что найдётся такая точка x, что $\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} |x - x_k| = \frac{1}{2}$.