(1)

Алгоритм Евклида: напоминание

Сказать об исправлениях

$\exists\ M > N$

Прямой ход алгоритма Евклида

$$M^{\vdots d} = a_0 N^{\vdots d} + b_0^{\vdots d} \qquad (M, N)$$
$$N^{\vdots d} = a_1 b_0^{\vdots d} + b_1^{\vdots d} \qquad (N, b_0)$$
$$b_0 = a_2 b_1 + b_2 \qquad (b_0, b_1)$$
$$b_1 = a_3 b_2 + b_3 \qquad (b_1, b_2)$$
$$\dots$$
$$b_{n-3} = a_{n-1} b_{n-2} + b_{n-1} \qquad (b_{n-3}, b_{n-2})$$
$$b_{n-2} = a_n b_{n-1} \vdots d$$

Пример: Найдём все целые реш.-я ур.-я $27x + 10y = 1$.

Хотим всё выразить через 27 и 10

$\boxed{27} = 2 \cdot \boxed{10} + 7 \Rightarrow 7 = 27 - 2 \cdot 10$

$10 = 1 \cdot 7 + 3 \Rightarrow 10 = 27 - 2 \cdot 10 + 3 \Rightarrow 3 = 3 \cdot 10 - 27$

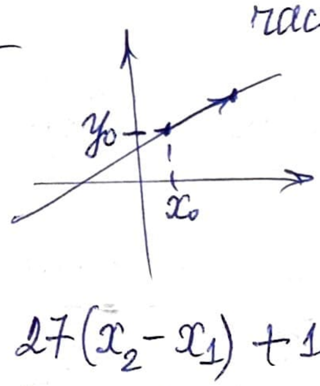
$7 = 2 \cdot 3 + 1 \Rightarrow \cancel{7}\ 27 - 2 \cdot 10 = 2 \cdot (3 \cdot 10 - 27) + 1 \Rightarrow$

$3 = \cancel{1 \cdot 3}\ 3 \cdot 1$

$\Rightarrow 1 = 3 \cdot 27 - 8 \cdot 10 \Rightarrow \boxed{x_0 = 3,\ y_0 = -8}$

частное решение

Решения получ. из данного смещением на вектор $(10, -27)$



$$\begin{cases} x = 3 + 10m, \\ y = -8 - 27n \end{cases} \qquad m, n \in \mathbb{Z}$$

$27(x_2 - x_1) + 10(y_2 - y_1) = 0$.

(x_1, y_1) и (x_2, y_2) — два реш.

$\Downarrow$

$(y_2 - y_1) \vdots 27$ и $(x_2 - x_1) \vdots 10$

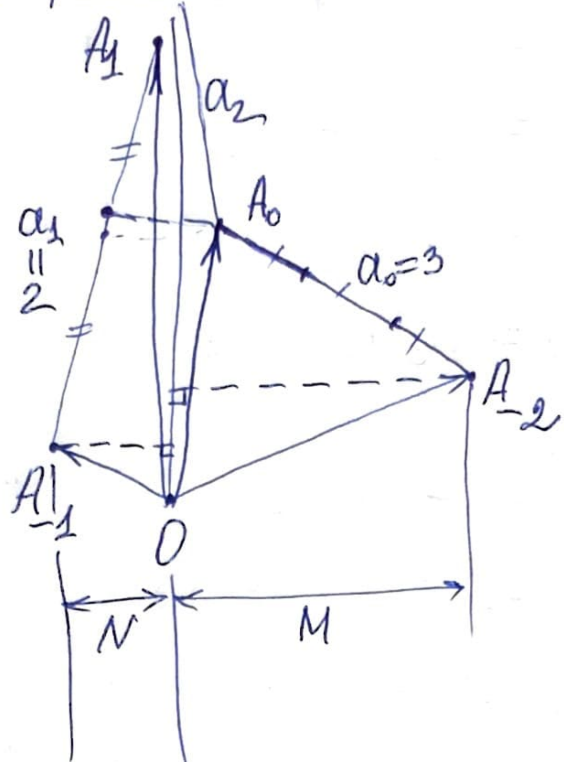
Отсюда следует

Теорема. Если $(M, N) = d$, то $\exists$ такие $u, v \in \mathbb{Z}$: $\boxed{uM + vN = d}$

То же самое верно и для многочленов

Геометрическое изобр. ал. Евкл. или „алгоритм вытягивания носов“.

$A_n = A_{n-2} + a_n A_{n-1}$,
$n \geq 0$.



$\overline{A_{-2}A_0} = a_0 \overline{OA_{-1}}$

$\overline{A_1 A_{-1}} = a_1 \cdot \overline{OA_0}$

$\overline{A_0 A_2} = a_2 \cdot \overline{OA_1}$

$M = a_0 N + b_0$, $M > N$

$N = a_1 b_0 + b_1$

$b_0 = a_2 b_1 + b_2$

Рано или поздно ломаные $A_{-2}A_0A_2A_4\ldots$ и $A_{-1}A_1A_3A_5\ldots$ сойдутся на вертикальной прямой, если M и N были соизмеримы. В противном случае, мы будем беск. долго приближаться к верт. прямой.

$$\frac{M}{N} = [a_0; a_1, a_2, a_3, \ldots]$$

Наблюдение: все точки ломаных $\in$ решётке, порождённой векторами $\overline{OA_{-1}}$ и $\overline{OA_{-2}}$.

Для дальнейшего нам пригодится следующая

Задача. На решётке, порожд. векторами $\overline{v}$ и $\overline{w}$ расам. параллелограмм P, внутри и на сторонах которого нет точек решётки (кроме вершин). Д-те, что $S(P) = S(\overline{v}, \overline{w})$

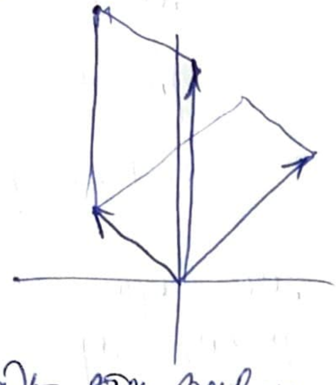
площадь фунд. парал. решётки

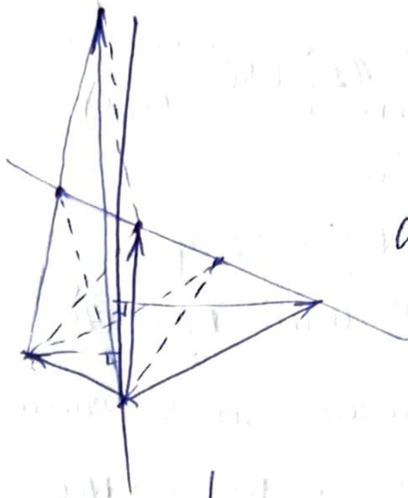
Задача. Получите отсюда формулу Пика:

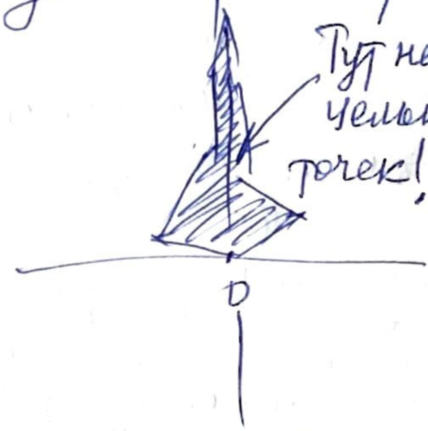
$S = v + \frac{b}{2} - 1$, если $S(\overline{v}, \overline{w}) = 1$.

③

Наблюдение. Внутри куска плоскости между ломаными нет ~~целых~~ точек решётки (кроме вершин).







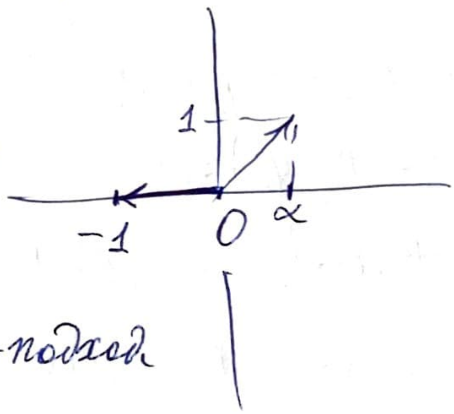
Но площадь эта равна площади фундам. парал. решётки

Значит, согласно задаче, все такие парал. явл. примитивными, т.е. не содержат точек решётки.

Фикс. сторону одну парал. и двигаем парал. её другую сторону. На каждом шаге мы получаем парал., имеющие одинак. площади

Теорема. Подходящие дроби — наилучшие для α приближения в классе всех обыкн. дробей со знаменателем $\le N$.

$\triangleright$ ~~Лемма~~ Рассм. для α решётку, порождённую векторами $\overline{OA_{-2}} = (\alpha, 1)$, $\overline{OA_{-1}} = (-1, 0)$



~~Рассм. в~~

Лемма. В алг. "вытягивания носов" с такими стартовыми векторами точки $A_n = (q_n\alpha - p_n, q_n)$, где $\frac{p_n}{q_n}$ — подход. дробь к числу α.

Перед док-ом леммы поймём, почему отсюда следует теорема.

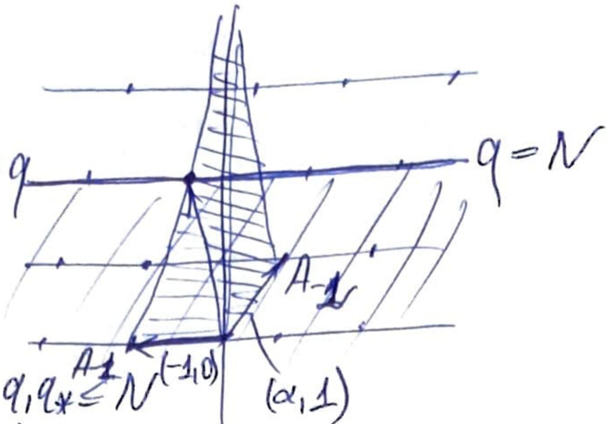
4

~~Мы хотим найти~~

Мы хотим для α найти по данному q такие p_* и q_*, что

$|q_*\alpha - p_*| \le |q\alpha - p|$

$\forall p \in \mathbb{Z}$, т.е.: $|q_*\alpha - p_*|$ ближе всего к 0 и точка $(q_*\alpha - p_*, q_*)$ ближе всего к вертикальной прямой



На каждом уровне лежат точки вида

$q\cdot(\alpha,1) + p\cdot(-1,0) = (q\alpha - p, q)$, т.е.

~~Мы хотим сравни~~ точки, которым отвеч. $\le q$ дроби со знам. (q)

~~(т.к. могут произойти сокращения). $(p,q)\ne 1$~~

Пересечение области между ломаными и ~~гориз. прямой $y=q$ состоит только~~ областью $q \le N$ содержит только вершины ломаных.

Из всех вершин выберем ближ.-ую к верт. прямой. (отлич. от 0).

Никакая другая точка не лежит ближе к верт. прямой, поскольку тогда бы она оказалась внутри фигуры.

Д.-во леммы: Индукция по n.

$n=0$: $p_0 = a_0$, $q_0 = 1$, $A_0 \overset{?}{=} (q_0\alpha - p_0, q_0) = (\underbrace{\alpha - \overset{a_0}{p_0}}_{\alpha - [\alpha]}, \overset{1}{q_0})$

$A_0 = A_2 + a_0 A_{-1}$

$n=1$: $p_1 = a_0a_1 + 1$, $q_1 = a_1$,

$A_1 \overset{?}{=} (q_1\alpha - p_1, q_1)$

$A_1 = A_{-1} + a_1 A_0 = (-1,0) + a_1(\alpha - a_0, 1) =$

$= (-1 + a_1\alpha - a_1a_0, a_1)$

$(q_1\alpha - p_1, q_1) = (a_1\alpha - (a_0a_1+1), a_1)$.

Переход: $n \geq 2$, для A_{n-1} и A_{n-2} — верно. Тогда

$A_n = A_{n-2} + a_n A_{n-1} =$ задача.

$a_0,\ a_0 + \frac{1}{a_1},\ a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2}},$

$a_0 + \frac{1}{a_1} = \frac{a_0a_1 + 1}{a_1}$

$a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2}} = a_0 + \frac{a_2}{a_1a_2+1} = \frac{a_0a_1a_2 + a_0 + a_2}{a_1a_2 + 1}$

(5)

~~Утв. с ...~~ Индукт. переход следует из след. задачи:

~~Индукц. перехо~~ Задача.] $[a_0;a_1,a_2,a_3,\ldots] = \frac{p_n}{q_n}$

Тогда
$$(1)\ p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2} \quad (n \geq 2)$$
$$(2)\ q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2} \quad (n \geq 2)$$
$$(3)\ p_{n-1} q_n - p_n q_{n-1} = (-1)^n \quad (n \geq 1)$$
соотн-ия верны тождеств. но $\forall$ действ.-х a_i.

$\triangleright$ Выведем (3) из (1) и (2) индукцией по $n \geq 1$.

Вопрос: Что надо сделать?

Переход: ~~$p_{n-1}q_n = a_{n-1}p_n$~~
$$\begin{cases} p_n q_{n-1} = a_n p_{n-1} q_{n-1} + p_{n-2} q_{n-1} \\ q_n p_{n-1} = a_n q_{n-1} p_{n-1} + q_{n-2} p_{n-1} \end{cases}$$
$$p_n q_{n-1} - q_n p_{n-1} = p_{n-2} q_{n-1} - q_{n-2} p_{n-1} = (-1)^{n-1}.$$

$n=1$: $p_1 = a_0 a_1 + 1$,

$q_1 = a_1$

$p_0 = a_0$, $q_0 = 1$

$a_0 \cdot a_1 - (a_0 a_1 + 1)\cdot 1 = (-1)^1 = -1$ – верно.

Докажем (1) и (2). По индукции при $n \geq 2$:

Переход:
$$\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} = \frac{p_{n-1}\left(a_n + \frac{1}{a_{n+1}}\right) + p_{n-2}}{q_{n-1}\left(a_n + \frac{1}{a_{n+1}}\right) + q_{n-2}} = \qquad + \frac{\cdots}{a_n + \frac{1}{a_{n+1}}}$$

a_n

$$= \frac{(p_{n-1}a_n + p_{n-2}) + \frac{p_{n-1}}{a_{n+1}}}{(q_{n-1}a_n + q_{n-2}) + \frac{q_{n-1}}{a_{n+1}}} = \frac{p_n a_{n+1} + p_{n-1}}{q_n a_{n+1} + q_{n-1}}.$$

$\Longrightarrow \frac{p_n}{q_n} = r_n$ – это n-я подходящая дробь

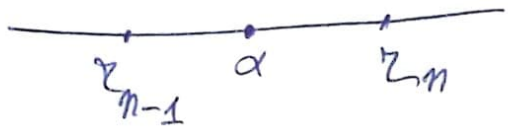
Вопрос: Всё доказали? В чём проблема?

Ответ: Нужно проверить взаимную простоту!

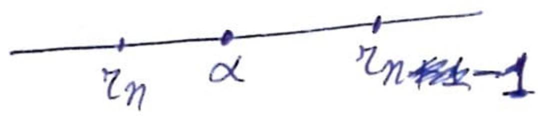
] $d \mid p_n$ и $d \mid q_n$. Тогда из (3) $\Longrightarrow d \mid (-1)^n$ $\triangleleft$

Утв. $r_n \to \alpha$ при $n \to \infty$.

$\triangleright$



или



$$|r_n - r_{n-1}| = \left|\frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right| = \frac{1}{q_n q_{n-1}}.$$

$\Rightarrow |r_n - \alpha| \le \dfrac{1}{q_n q_{n-1}}$ ← очень быстрая сходимость. Но $\{q_n\} \uparrow_n \to \infty$ $\triangleleft$

Задача. Д-те, что $r_0 < r_2 < r_4 < \ldots < \alpha < \ldots < r_3 < r_1$, где r_n — это n-я подходящая дробь числа α.

Пример. $\pi = [3; 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, 2, 1, 3, 14, 2, \ldots]$

Соотв. подход. дроби:

$$\underset{r_0}{3},\ \underset{r_1}{\frac{22}{7}},\ \underset{r_2}{\frac{333}{106}},\ \underset{r_3}{\frac{355}{113}},\ \underset{r_4}{\frac{103993}{33102}},\ \underset{r_5}{\frac{104348}{33215}}$$

$\left|\pi - \dfrac{22}{7}\right| < \dfrac{1}{7} = 0.143..$ | $\sim \underbrace{3.14}285$

$\left|\pi - \dfrac{333}{106}\right| < \dfrac{1}{7 \cdot 106} = 0,00135$ | $\sim \underbrace{3.1415}094$

$\left|\pi - \dfrac{355}{\underbrace{113}}\right| < \dfrac{1}{106 \cdot 113} = 0.0000835$ | $\sim \underbrace{3.141592}\underbrace{9}20354$

нам не пригодился знаменатель

wrong digit!

$\left|\pi - \dfrac{103993}{33102}\right| < \dfrac{1}{113 \cdot 33102}$

$\left|\pi - \dfrac{104348}{33215}\right| < 9 \cdot 10^{-10}$ ← совпадут 9 знаков после запятой

точность $\sim 10^{-9}$, а знаменатель $\sim 10^{-4}$

Пример

$[\sqrt{2}]=1, \quad \sqrt{2}=1+(\sqrt{2}-1)=1+\dfrac{1}{\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}}=$

$=1+\dfrac{1}{1+\sqrt{2}}=1+\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{2+\dots}}}$

$1, \ \dfrac{3}{2}, \ 1+\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{2}}=\dfrac{7}{5},$

$\dfrac{5}{2}$

$1+\dfrac{1}{2+\dfrac{2}{5}}=\dfrac{17}{12}, \quad 1+\dfrac{1}{2+\dfrac{5}{12}}=\dfrac{41}{29}, \quad 1+\dfrac{1}{2+\dfrac{12}{29}}=\dfrac{99}{70}$

$\dfrac{12}{5} \qquad \dfrac{29}{12} \qquad \dfrac{70}{29}$

$1+\dfrac{1}{2+\dfrac{29}{70}}=\dfrac{239}{169} \qquad \dfrac{297}{210}$

$\left|\sqrt{2}-\dfrac{297}{210}\right| \leqslant \dfrac{1}{\cancel{169}\cdot 70\cdot 29}=0.0005$

$\dfrac{297}{210} = \dfrac{99}{70} \approx \underline{1,4142},85714\dots$

2 1 3 5 6

Верны 4 знака после запятой