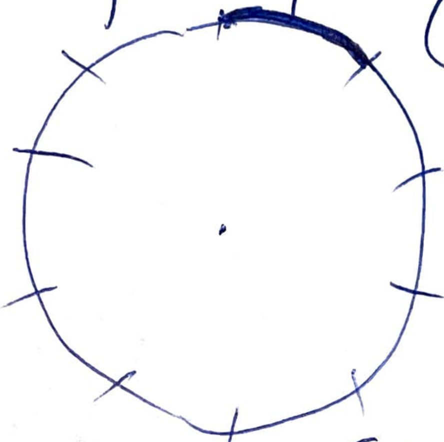
1) Задача о железной дороге

А) Следующая задача и её решение иллюстрируют взаимосвязь между важными математическими объектами.

ИСТОЧНИК ЗАДАЧИ И РЕШ.: ВИДЕО А. САВВАТЕЕВ, АВТОР ДАМИР АБЗАЛИЛОВ

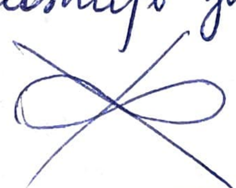
Г Имеется 13 сегментов детской железной дороги (одинаковых)



Состыковка деталей железной дороги: 1)

2)

Какое наименьшее число деталей нужно докупить, чтобы из всех деталей можно было сложить замкнутый несамопересекающийся путь?



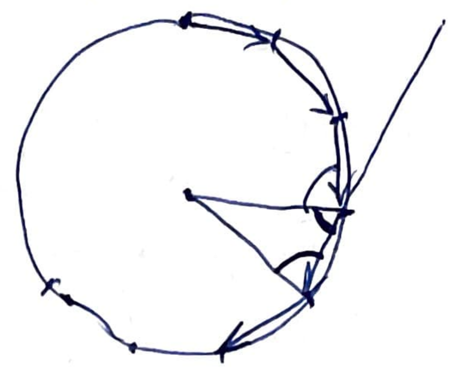
⌋

В) Есть ли вопросы по условию задачи?

С) Возникла ли идея у кого-нибудь, как подойти к этой задаче?

Решение. • Ассоциируем с дугами окр-ти векторы с началом и концом в дугах:

Получим правильный 13-угольник



• Угол между соседними векторами в многоугольнике равен $\frac{2\pi}{13}$

— Напомнить, что такое угол между векторами

• Положим первую деталь ~~в~~ горизонтально — б.о.о.

• В итоге, на каждом шаге построения мы либо поворачиваемся на $\pm\frac{2\pi}{13}$, либо удлиняемся

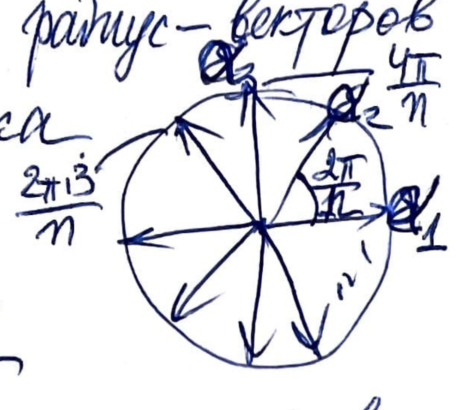
Повернулись на $\frac{2\pi}{13}$

Повернулись на $-\frac{2\pi}{13}$

Остались на том же направлении

• Но мы стартовали с горизонтального радиус-вектора вершины многоугольника $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ каждый вектор будет одним из радиус-векторов вершины правильного 13-угольника



• Но что это за радиус-векторы?

— Это все корни степени 13 из 1

Напоминание: при возведении компл. числа (вектора) в n-ю степень его длина возводится в степень n, а угол с горизонтальной (веществ.-й) осью увелич. в n раз

• Будем обозначать эти вектора ~~α~~ $\alpha_0, \ldots, \alpha_{12}$

$\left(\alpha_j = e^{\frac{2\pi j}{13}},\ j = 0, \ldots, 12\right)$.

• Предположим, что для векторов $\alpha_0, \ldots, \alpha_{12}$ в кол-вах $k_0, k_1, \ldots, k_{12}$ мы смогли замкнуть железную дорогу (возможно с самопересечениями)

$\alpha_0 = 1$

• Тогда вопрос: как можно записать этот факт на языке алгебры?

— ~~Ответ:~~ $k_0 + k_1\alpha_1 + \ldots + k_{12}\alpha_{12} = 0$.

Заметим, что $\alpha_j = \alpha_1^j$, т.к. угол α_j с ~~осью~~ горизонтальной осью в j раз больше угла α_1 с горизонт. осью.

Итак, $\exists\, k_0, k_1, \ldots, k_{12} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$:

$$k_0 + k_1\alpha_1 + \ldots + k_{12}\alpha_1^{12} = 0$$

• Но α_1 удовлетворяет ур-ю $\alpha_1^{13} - 1 = 0$.

$\alpha_1 \neq 1 \Rightarrow \alpha_1^{12} + \alpha_1^{11} + \ldots + \alpha_1 + 1 = 0$

• Получается, что α_1 ~~удовлет~~ является корнем как $P(x) = k_{12}x^{12} + \ldots + k_1 x + k_0$, так и $Q(x) = x^{12} + \ldots + x + 1$

• Теперь найдём многочлен наиб. степени, который делит и P, и Q. Он будет иметь рациональные коэф-ы. Вопрос: Почему? — Ответ: алгоритм Евклида

Пример: $D = НОД(x^3+x^2+x+1, \cancel{x^3-1}) \overset{(4)}{=} x^3-x^2+x-1) =$

вычит. из 1-го 2-й

$= \cancel{НОД(x^2+x} = НОД(2x^2+2, x^3-x^2+x-1) =$

$= НОД(2(x^2+1), -\frac{x}{2}(2x^2+2)+x^3-x^2+x-1) =$

$$\begin{array}{r|l} x^3-x^2+x-1 & 2x^2+2 \\ \hline -(x^3+x) & \frac{x}{2}-\frac{1}{2} \\ -x^2-1 & \\ -(-x^2-1) & \\ 0 & \end{array}$$

$= НОД(2(x^2+1), \frac{1}{2}\cancel{(x^2+1)})$

$\Rightarrow НОД = \pm(x^2+1)$

- Значит, α_1 является корнем многочлена степени <12, но >1 с рац. коэф. и самое важное, что многочлен $P(x) = D(x) \cdot F(x)$ представляется в виде произведения многочленов с рац. коэф. (непостоянных)

- Покажем, что для $P(x) = x^{12}+\ldots+x+1$ это невозможно!

Утв. Многочлен $P_p(x) = x^{p-1}+\ldots+x+1 = \frac{x^p-1}{x-1}$ неприводим $\forall$ простого p. — пример многочлена деления круга на p частей.

$\triangleright$ По модулю p: $(x-1)^p = x^p-1$, т.к. $C_p^s \,\vdots\, p$ $\forall s \neq 1, p$, $s>0$

$\Rightarrow (x-1)(x-1)^{p-1} \equiv (x-1)(x^{p-1}+\ldots+1)$

$\Rightarrow (x-1)^{p-1} \equiv x^{p-1}+\ldots+1 \pmod p$ $\boxed{Задача!}$

$(x-1)^{p-1} \equiv x^{p-1}+\ldots+1 = A(x)B(x)$ от противного (mod p)

$\Rightarrow A(x) = (x-1)^k,\ B(x) = (x-1)^l,\ k+l=p-1$ по mod p

Значит, $\cancel{(1-1)^{p-1}}$ $A(1)B(1)$ делится на p^2, а

$\cancel{(1-1)^{p-1}=0}$ $\underbrace{1+\ldots+1}_{p \text{ раз}}$ не делится на p^2 (только на p).

$\triangleleft$

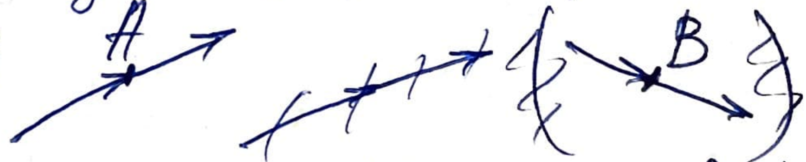
- Итак, значит, P и Q пропорциональны $\Rightarrow$

$\Rightarrow k_0 = \ldots = k_{12} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$

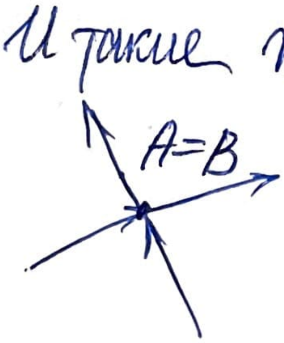
- Число деталей есть $k \cdot 13$.
- Может ли $k=2$? — Вопрос

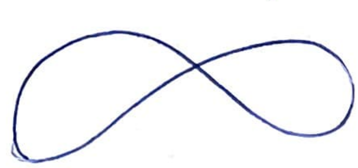
Ответ: Нет, т.к. в этом случае будет самопересечение

Задача: покажите, что $\exists$



И такие пары векторов имеют общие вершины A и B.





- Значит, $k=3$. Как построить?

② Цепные дроби

Какие есть книжки и статьи: ⑧

- В.И. Арнольд „Цепные дроби" • Табачни[ков]
- В.Ю. Бугаенко „Ур-я Пелля" Фукс

• Хотим приближать действ. числа ~~и~~ дробями с как можно меньшим знаменателем. Это важно для астрономии

может ли число быть прибл. рац-ми

• Пример из жизни: отношение сторон А4.

$$\sqrt{2} \approx \frac{297}{210} = \frac{99}{70}.$$

Число пи = 22/7 — Архимед

355/113 — 6 точных знаков

• Задаёмся ~~знаменателем q~~ нат. числом n.

Пусть α — иррац. Хотим найти $\frac{p_0}{q_0}$ с наим. $q_0 \le n$:

$$\left|\alpha - \frac{p_0}{q_0}\right| \le \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \quad \forall \text{ дроби } \frac{p}{q} \text{ с } q \le n.$$

(несокр.)

Теорема. $\forall \alpha$ ~~такая~~ $\forall n$ такая дробь существует.

(FUN!) ~~Из~~ ЦЕПНЫЕ ДРОБИ СВЯЗАНЫ С ПРИГОТОВЛЕНИЕМ ОКРОШКИ ИЗ КОШКИ

Такие дроби являются цепными:

Опр. Конечная цепная дробь — это выражение вида

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}}}},$$

где $a_0 \in \mathbb{Z}$, $a_i \in \mathbb{N}$ ~~при~~ при $1 < i < n$

Примеры: $\frac{52}{7} = 7 + \frac{3}{7} = 7 + \cfrac{1}{\frac{7}{3}} = 7 + \cfrac{1}{2 + \frac{1}{3}}$

$\frac{8}{15} = \cfrac{1}{\frac{15}{8}} = \cfrac{1}{1 + \frac{7}{8}} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\frac{8}{7}}} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \dots}}$

(5)

Утв. $\forall$ рац. число мб представлено в виде конечной цепной дроби. Это представление единственно с точностью до одной неоднозначности: если $n>0$ и $a_n=1$, то $a_{n-1}+1 \rightsquigarrow a_n$.

$\triangleright$ $\exists$: Для $\frac{p}{q}$ в несокр. — индукция по знам.

База: $q=1$ — очевидно.

Переход: $\exists$ мы всё доказали для $<q$.

$\exists\ r=\frac{p}{q}$. Положим $a_0=[r]$

Тогда $r=a_0+\frac{p'}{q}$, где $0<p'<q$.

$$r=a_0+\cfrac{1}{\underbrace{\cfrac{q}{p'}}_{r'}}$$

по предполож. $\exists$ разл.

$$r'=a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{\ddots+\cfrac{1}{a_{n-1}+\cfrac{1}{a_n}}}}$$

$!$. $\exists$
$$r=\underbrace{a_0}_{\in\mathbb{N}}+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{\ddots+\cfrac{1}{a_{n-1}+\cfrac{1}{a_n}}}}}$$
<1

$a_0=[r]$,

$$\underbrace{\frac{1}{r-a_0}}_{b_1}=\underbrace{a_1}_{\in\mathbb{N}}+\frac{1}{a_2+\ldots}<1$$

Введём b_n: $b_0=r$, $a_0=[b_0]$

$b_1=\frac{1}{b_0-a_0}$, $b_2=\frac{1}{b_1-a_1}$ $\quad a_1=[b_1]$ $\ldots$ $a_n=[b_n]$

$$b_n=\frac{1}{b_{n-1}-a_{n-1}}$$ $\triangleleft$

• Мы получили алгоритм построения цепной дроби для рац. числа.

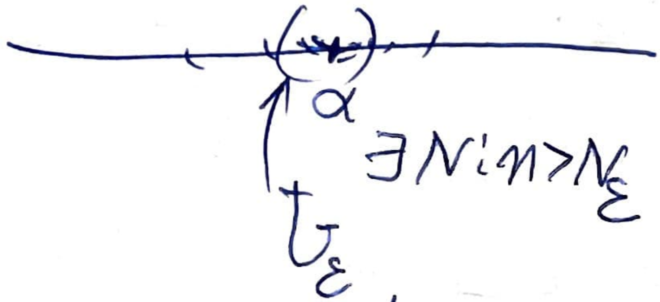
Процесс конечен — почему? — Видно из построения

• Но можно так раскладывать и иррац. числа. Будет беск. цепная дробь.

$$\alpha = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \ldots}}} = [a_0; a_1, a_2, a_3, \ldots]$$

• Что это означает?

• ~~Раскл~~ Будем обрывать всё дальше и дальше. Получим посл-ть, мало отклоняющуюся от значения α при больших номерах n



• Вопрос: какое число отвечает цепной дроби

$$[1; \underbrace{1, 1, 1, 1, 1, \ldots]}_{[1,1,\ldots]=x} = 1 + x = 1 + \frac{1}{1+x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 + x - 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$ — с каким знаком выбрать?

Для числа $\pi = [3; 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, 2, 1, 3, 1, \boxed{14}]$

Задача. ~~Если~~ Период. цепная дробь = квадр. иррац.

Задача*. $\forall$ квадр. иррац. предст. период. цепной дробью.

Теорема Лиувилля.

Опр. Цепная дробь, ~~ст~~ для α, ~~обор~~ которую оборвали на шаге n называется n-й подходящей дробью к α. Будем обозначать $r_n = \frac{p_n}{q_n}$.

$a_0, a_1, a_2, \dots$ — неполные частные цепной дроби $[a_0; a_1, a_2, \dots]$

Рассм. подходящие дроби к золотому сечению

$$\frac{\sqrt{5}+1}{2} = [1; 1, \dots] \approx 1.61\dots$$

$$\underset{r_0}{1},\quad 1+\frac{1}{1} = \boxed{2},\quad 1+\frac{1}{1+1} = \underset{r_2}{\frac{3}{2}},\quad 1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+1}} = 1+\frac{2}{3} = \boxed{\frac{5}{3}},\quad 1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+1}}} = 1+\frac{3}{5} = \underset{r_4}{\frac{8}{3}}, \dots$$

Монотонна ли посл-ть подход.-х дробей?

— Нет!

$$1 < \frac{3}{2} < \frac{8}{3} < \dots < \cancel{1}\frac{1+\sqrt{5}}{2} < \dots < \frac{5}{3} < 2$$

Наблюдение. $r_0 < r_2 < r_4 < \ldots < \alpha < \ldots < r_3 < r_1$

$\triangleright$ Рассм. ф-ию $f_n(x) = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \ldots \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{x}}}$

f_n — возраст. при чётном n
убывает при нечётном n

Пример: $\cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{4}}}$ — какая по монотонности?

$\exists\, \alpha_n = a_n + \cfrac{1}{a_{n+1} + \ldots}$ (∞), $a_{n,m} = a_n + \cfrac{1}{a_{n+1} + \ldots + \cfrac{1}{a_m}}$

Тогда $a_n < \alpha_n$, $a_n < a_{n,m}$, $\boxed{m > n}$

$f_n(a_n) = r_n$ $\quad$ $f_n(a_{n,m}) = r_m$.

$f_n(\alpha_n) = \alpha$

Если n чётно: (f_n возрастает)

$f_n(a_n) < f_n(\alpha_n)$, $f_n(a_n) = r_n$, $f_n(\alpha_n) = \alpha$

$f_n(a_n) < f(a_{n,m})$, $r_n < r_m$

Если n нечётно: ($\Rightarrow f_n$ убывает)

$f_n(a_n) > f(\alpha_n)$, $f_n(a_n) = r_n$, $f(\alpha_n) = \alpha$

$f_n(a_n) > f(a_{n,m})$, $r_n > r_m$ $\triangleleft$

Ближайшая цель: показать, что подходящие ценные дроби числа α сходятся к α.

Для этого докажем следующие тождества:

$\forall$ окр-ти α $\exists N$, начиная с которого $ч_n$ туда попадают

~~Лемма~~ Утв. $[a_0; a_1, a_2, a_3, \dots, a_n] = \frac{p_n}{q_n}$

(1) $p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2}$ $(n \geq 2)$ $| \cdot q_{n-1}$

(2) $q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2}$ $(n \geq 2)$ $| \cdot p_n$

(3) $p_{n-1} q_n - p_n q_{n-1} = (-1)^n$ $(n \geq 1)$

(3) выведем из (1) и (2) по инд-ции по $n \geq 1$.

$\triangleright$ (1) и (2). По индукции при $n \geq 2$.

$$\frac{p_n}{q_n} = \frac{p_{n-1} a_n + p_{n-2}}{q_{n-1} a_n + q_{n-2}}$$

$a_0;\ a_0 + \frac{1}{a_1} = \frac{a_0 a_1 + 1}{a_1}$ $\quad p_1$, q_1

~~$a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2}} = $~~

База: $a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2}} = a_0 + \frac{a_2}{a_1 a_2 + 1} =$ ~~$= a_0 + \frac{a_2}{a_1 + a_2} = \frac{a_0(a_1 + a_2) + a_2}{a_1 a_2 + 1} = a_2 a$~~

$$= \frac{a_0 a_1 a_2 + a_0 + a_2}{a_1 a_2 + 1} = \frac{a_2 (a_0 a_1 + 1) + a_0}{a_1 a_2 + 1}$$

p_1 $\quad q_1$

Переход: $$\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} = \frac{p_{n-1}\left(a_n+\frac{1}{a_{n+1}}\right)+p_{n-2}}{q_{n-1}\left(a_n+\frac{1}{a_{n+1}}\right)+q_{n-2}} =$$

$$= \frac{\overbrace{p_{n-1}a_n+p_{n-2}}^{p_n}+\frac{p_{n-1}}{a_{n+1}}}{\underbrace{q_{n-1}a_n+q_{n-2}}_{q_n}+\frac{q_{n-1}}{a_{n+1}}} =$$

$$= \frac{p_n a_{n+1}+p_{n-1}}{q_n a_{n+1}+q_{n-1}}.$$

$\Rightarrow \frac{p_n}{q_n} = r_n$. ~~Пред~~ Покажем, что дробь имеет взаимно простые числитель и знаменатель. Действ., если $d \mid$ $\underset{p_n}{\text{числ.}}$ и $\underset{q_n}{\text{знам.}}$, то из (3) $\Rightarrow$

$\Rightarrow d \mid (-1)^n \Rightarrow d = 1.$ $\lhd$

Утв. $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = \alpha$

$\rhd$ $r_{n-1} \quad \alpha \quad r_n$ или $r_n \quad \alpha \quad r_{n-1}$

Значит, $|r_n - r_{n-1}| = \frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} = \frac{(-1)^{n-1}}{q_n q_{n-1}}$

$\boxed{|r_n-\alpha| < \frac{1}{q_n q_{n-1}}}$ $\quad q_n \to \infty$ $\lhd$