Цепные дроби

Конечной цепеной дробью называется выражение

$$[a_0, a_1, ..., a_n] = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \ldots \frac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{a_n}}}}},$$

где числа a_i — целые.

Любое действительное число α можно разложить в «почти цепную дробь», т. е. $\alpha = [a_0, ..., \alpha_n]$, где $a_i \in \mathbb{N}$, а $\alpha_n \in \mathbb{R}$. Для этого нужно на каждом шаге выделять целую часть, а дробную — переворачивать $\left(x = \frac{1}{\frac{1}{x}}\right)$.

Если проделывать этот процесс долго, то мы будем приближаться к числу α всё ближе, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty} [a_0, ..., a_n] = \alpha$ — но это не очевидно!

Символом 🔥 обозначены наиболее важные задачи.

1. Представьте числа $\frac{7}{11}$ и $\sqrt{3}$ в виде цепных дробей.

2. Как представление обыкновенной дроби в непрерывном виде связано с алгоритмом Евклида?

3. 🔥 Докажите, что если цепная дробь бесконечна и периодична, то она имеет вид $a + b\sqrt{c}$ для целых a, b и натурального c, т. е. является квадратичной иррациональностью.

Обозначим $r_n = [a, ..., a_n] = \frac{p_n}{q_n}$ — *подходящая дробь*.

4. 🔥 Докажите, что последовательности p_n и q_n удовлетворяют следующим рекуррентным соотношениям:

$$\begin{cases} p_{n+1} = p_n a_{n+1} + p_{n-1}, \\ q_{n+1} = q_n a_{n+1} + q_{n-1}. \end{cases}$$

Как следствие, последовательности p_n и q_n монотонно возрастают по абслоютной величине, т. е. $p_n,\ q_n \to \infty$.

5. 🔥 Докажите, что при всех $n \geqslant 1$

$$p_{n-1} q_n - p_n q_{n-1} = (-1)^n.$$

6. Пусть натуральное число n чётно, и $m > n$. Тогда $r_n < \alpha$ и $r_n < r_m$. Если же n нечётно, и $m > n$, то $r_n > \alpha$ и $r_n < r_m$.

7. Почему

$$\left|\frac{p_n}{q_n} - \alpha\right| \leqslant \frac{1}{q_n^2}?$$

Из задач выше и некоторых утверждений анализа следует

Теорема. *Последовательность подходящих дробей r_n сходится к числу α.*

Оказывается, справедлива следующая неожиданная

Теорема. *Если несократимая дробь $\frac{p}{q}$ очень хорошо приближает число α, а именно*

$$\left|\frac{p}{q} - \alpha\right| < \frac{1}{2q^2},$$

то она является подходящей для числа α.

8. Из предыдущей теоремы выведите, что среди подходящих дробей числа $\sqrt{d}$ есть решения уравнения Пелля $x^2 - dy^2 = 1$.