Комплéксные числа и кватернионы. Начало

Определения и конструкции смотрите в записках прошлого занятия.

Задача 1. Доведите до конца доказательство утверждения с занятия про то, что умножение на единичное по длине комплексное число является поворотом плоскости, показав, что это преобразование не меняет ориентированной площади.

Указание. Возьмите, например, параллелограмм, натянутый на базисные вектора 1 и i и посмотрите, что произойдёт с его ориентированной площадью при таком преобразовании.

Задача 2. Что будет происходить с любой точкой на единичной окружности при возведении её в квадрат? в куб? в степень n? Найдите все точки z плоскости, которые удовлетворяют уравнению $z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$. Нарисуйте их на плоскости и скажите, что будет в случае многочлена $z^n + z^{n-1} + ... + 1$.

Задача 3. Точку $1 + i$ возвели в 2021-ю степень. Укажите расположение получившейся точки на плоскости.

Задача 4. Из центра правильного многоугольника провели все векторы в его вершины. Докажите, что сумма данных векторов равна нулевому вектору.

Задача 5. Пусть P — произвольный выпуклый многогранник. Рядом с каждой гранью многогранника P нарисовали вектор, перпендикулярный этой грани, равный по величине площади этой грани и направленный наружу. Докажите, что сумма полученных векторов равна нулевому вектору.

Примечание. Выпуклым многогранником называется пересечение полупространств в трёхмерном пространстве (например, куб, пирамида и т. д.)

Указание. Воспользуйтесь векторным произведением и тем фактом, что оно кососимметрично (то есть $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = -\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}$ для любых векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$), а также, что оно линейно (то есть $\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c}$ для любых векторов $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$).

Задача 6. Докажите, что многочлен $x^{44} + x^{33} + x^{22} + x^{11} + 1$ делится на многочлен $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$.

Задача 7. Правильный n-угольник вписан в единичную окружность. Докажите, что сумма квадратов всех сторон и всех диагоналей равна n^2.

Задача 8. Докажите, что 4 точки $z_1,\ z_2,\ z_3,\ z_4$ лежат на одной окружности тогда и только тогда, когда их *двойное отношение*

$$\frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} : \frac{z_4 - z_1}{z_4 - z_2}$$

является вещественным числом.

Задача 9. Если вы знаете, что такое косинус, докажите, что следующие числа рациональны и найдите их в виде m/n, где m — целое, а n — натуральное.

а) $\cos\dfrac{2\pi}{7} + \cos\dfrac{4\pi}{7} + \cos\dfrac{6\pi}{7}$;

а) $\cos\dfrac{2\pi}{7} + \cos\dfrac{4\pi}{7} + \cos\dfrac{6\pi}{7}$.

Задача 10. Пусть $P(z)$ — многочлен с вещественными коэффициентами. Пусть z_0 — корень P. Докажите, что тогда $\overline{z_0}$ — тоже его корень.

Пример. Многочлен $P(z) = z^2 + 1$ удовлетворяет условию задачи. Один из его корней равен i, а другой равен $-i$, то есть сопряжён к корню i.

Задача 11. Как в комплексных числах будет выглядеть преобразование плоскости, которое реализует поворот вокруг точки $1 + 2i$ на угол 60° по часовой стрелке с последующим отражением относительно оси Ox с последующим параллельным переносом на вектор $(3, 4)$ и, наконец, с последующей гомотетией с центром в 0 и сжимающей в 2 раза?