

Подсчёт углов и вспомогательная окружность

1. Угловые величины противоположных дуг, высекаемых на окружности пересекающимися хордами, равны α и β . Найдите угол между хордами.
2. Угловые величины дуг, заключённых между двумя хордами, продолжения которых пересекаются вне круга, равны α и β ($\alpha > \beta$). Под каким углом пересекаются продолжения хорд?
3. Докажите, что угол между касательной и хордой, проведённой через точку касания, равен половине угловой величины дуги, заключённой между ними.
4. *Теорема о касательной и секущей.* Из одной точки проведены касательная и секущая к некоторой окружности. Докажите, что произведение всей секущей на её внешнюю часть равно квадрату длины отрезка касательной.
5. Вершина A треугольника ABC соединена отрезком с центром O описанной окружности. Из вершины A проведена высота AH . Докажите, что $\angle BAH = \angle OAC$.
6. Докажите, что трапеция является равнобедренной тогда и только тогда, когда около неё можно описать окружность.
7. На гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC во внешнюю сторону построен квадрат с центром в точке O . Докажите, что CO — биссектриса прямого угла.
8. На окружности даны точки A, B, C, D в указанном порядке; M — середина дуги AB . Обозначим точки пересечения хорд MC и MD с хордой AB через E и K . Докажите, что $KECD$ — вписанный четырёхугольник.
9. В треугольнике ABC угол B равен 60° , биссектрисы AD и CE пересекаются в точке O . Докажите, что $OD = OE$.
10. AM — биссектриса треугольника ABC . Точка D принадлежит стороне AC , причём $\angle DMC = \angle BAC$. Докажите, что $BM = MD$.
11. К двум окружностям, пересекающимся в точках K и M , проведена общая касательная. Докажите, что если A и B — точки касания, то сумма углов AMB и AKB равна 180° .
12. Диагонали вписанного четырёхугольника перпендикулярны. Докажите, что сумма квадратов противоположных сторон равна квадрату диаметра описанной окружности.
13. *Теорема Коперника.* По неподвижной окружности, касаясь её изнутри, катится без скольжения окружность вдвое меньшего радиуса. Какую траекторию описывает фиксированная точка K подвижной окружности?