1 Теорема Уитни

Будем раскрашивать вершины графов несколькими цветами так, чтобы две любые смежные вершины имели разные цвета. Если такая раскраска возможна, то она называется *правильной*. Везде предполагается, что графы простые (т. е. без кратных рёбер и петель).

Для данного графа G на n вершинах число способов раскрасить его в x цветов будем обозначать $f(G, x)$.

Задача 1. Найдите $f(G, x)$, если

1. G — граф без рёбер;

2. G — полный граф (т.е. любые две вершины соединены ребром);

3. G — цепь вершин (т. е. вершины соединены последовательно от первой до последней).

Задача 2. Найдите хроматический многочлен дерева.

Оказывается, $f(G, x)$ — многочлен степени n:

Задача 3. Рассмотрим в графе G две вершины u и v. Обозначим через $G + uv$ граф на n вершинах, отличающийся от графа G только тем, что в нём добавлено ребро uv. Через $G - uv$ — граф на n вершинах, отличающийся от графа G только тем, что в нём изъято ребро AB. И, наконец, обозначим через G/uv граф, полученный из $G + uv$ склеиванием вершин u и v (с отождествлением кратных рёбер).

1. Свяжите значения $f(G + uv, x)$, $f(G - uv, x)$ и $f(G/uv)$ некоторым выражением.

2. Докажите, что $f(G, x)$ — многочлен степени n для любого графа на n вершинах.

Данный многочлен $f(G, x)$ называется *хроматическим*. Можно уточнить его вид:

Задача 4 (Хасслер Уитни)**.** Хроматический многочлен связного графа на n вершинах имеет вид

$$x^n - a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} - ... + (-1)^{n-1}a_1x, \ a_i \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}.$$

Вопрос. *А что можно сказать про графы с k компонентами связности?*

2 В поисках хроматического многочлена

Задача 5. Найдите хроматический многочлен циклического графа (он выглядит комбинаторно, как выпуклый многоугольник).

Задача 6. Докажите, что в связном графе на n вершинах $f(G, x) \leqslant x(x - 1)^{n-1}$ для любого натурального x.

Задача 7. Пусть в графе G есть вершина v степени 2, причём смежные с ней вершины смежны между собой, а граф H получается из G удалением v и инцидентных с ней рёбер. Свяжите между собой $f(G, x)$ и $f(H, x)$.

Задача 8. Пусть граф соответствует разбиению выпуклого n–угольника непересекающимися диагоналями на треугольники. Найдите его хроматический многочлен и убедитесь, что он не зависит от данной триангуляции.

Задача 9. Найдите хроматический многочлен графа-колеса с n спицами.

3 Корни хроматического многочлена

Джордж Биркгоф придумал хроматические многочлены для штурма задачи о четырёх красках: достаточно было показать, что для любого планарного графа G выполнено $f(G,4) > 0$ — отсюда интерес к корням хроматических многочленов. Но не вышло. Зато было найдено много забавных фактов!

Задача 10. Может ли хроматический многочлен графа иметь отрицательные действительные корни?

Задача 11. Множество вершин графа называется *независимым*, если эти вершины попарно несмежны. Пусть p_k — количество разбиений множества вершин графа G на k независимых множеств. Тогда

$$f(G,x) = \sum_k p_k \cdot x^{\underline{k}},$$

где $x^{\underline{k}} = x(x-1)...(x-k+1)$ — *нижняя факториальная степень*.

Задача 12. Докажите, что любой действительный корень хроматического многочлена графа на n вершинах не больше $n-1$.

Задача 13. Пусть G — связный граф на n вершинах. Докажите, что $(-1)^n f(G,x) < 0$ при $0 < x < 1$.