КТО

На прошлом занятии мы обсудили Китайскую теорему об остатках. Напомню её:

Теорема. *Если целые* $m_1, ..., m_n$ *попарно взаимно просты, т. е.* $(m_i, m_j) = 1$ *для любых* $i \neq j$*, то система сравнений*

$$\begin{cases} x \equiv r_1 (\operatorname{mod} m_1)), \\ x \equiv r_2 (\operatorname{mod} m_2)), \\ \qquad ... \\ x \equiv r_n (\operatorname{mod} m_n)) \end{cases}$$

имеет решение относительно x*, причём оно единственно по модулю* $m_1 ... m_n$*.*

1. Найдите остаток от деления числа 2018^{2018} при делении на 84.

2. На столе лежат книги, которые надо упаковать. Если их связать в одинаковые пачки по 4, по 5 или по 6 книг, то каждый раз останется лишняя книга, а если связать по 7 книг в пачку, то лишних книг не останется. Какое наименьшее количество книг может быть на столе?

3. Докажите, что для любых натуральных n и k найдётся множество, состоящее из n последовательных натуральных чисел таких, что каждое из них делится на k различных простых чисел, на которые не делится никакое другое число из этого множества.

4. Пусть $f(x)$ – многочлен с целыми коэффициентами от переменной x. Докажите, что для любых натуральных m и n найдётся такое целое x_0, что каждое из чисел

$$f(x_0), f(x_0 + 1), ..., f(x_0 + n - 1)$$

будет иметь по крайней мере m различных простых делителей.

5. Докажите существование решения в КТО при помощи функции Эйлера.

6. Напишите программу, решающую данную систему сравнений с попарно взаимно простыми модулями. Входные данные: остатки и модули; выходные – искомый остаток.