

Усреднение в геометрии

Среднее значение функции

- Среднее значение функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ — это

$$\frac{1}{b-a} \sum_i f(x_i) \Delta x_i$$

- $\langle f \rangle = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$

Среднее значение длины вектора

- Пусть имеется вектор a . Он проектируется на прямую ℓ , после чего находится длина его проекции
- **Вопрос.** Каково среднее значение (по всем прямым ℓ) длины проекции вектора a ?
- Пусть $\angle(\ell, Ox) = \varphi$, а $\angle(a, Ox) = \alpha$, $\alpha = \text{const}$ для данного a
- Тогда длина проекции вектора равна...
- $a |\cos(\varphi - \alpha)|$

Среднее значение длины вектора

- Находим среднее значение: $\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} a |\cos(\varphi - \alpha)| d\varphi = ?$
- $= \frac{2a}{\pi}$
- **Задача.** Рассмотрим два множества векторов $A = \{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n\}$ и $B = \{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_m\}$ на плоскости. Известно, что сумма длин проекций всех векторов из A на любую прямую больше одной для B . Докажите, что $\sum a_i > \sum b_i$

Среднее значение длины вектора

- $\sum a_i |\cos(\varphi - \alpha_i)| \geq \sum b_i |\cos(\varphi - \beta_i)|$
- $\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sum a_i |\cos(\varphi - \alpha_i)| d\varphi \geq \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sum b_i |\cos(\varphi - \beta_i)| d\varphi$
- $\sum \frac{2a_i}{\pi} \geq \sum \frac{2b_i}{\pi}$

А в пространстве?

- Всё просто: $\frac{1}{S(S^n)} \int_{S^n} f dS$
- $\frac{1}{S(S^n)} \sum f(x_i) \Delta S_i$, где ΔS_i — кусочки единичной сферы S^n
- Чему равно среднее значение длины вектора в трёхмерном пространстве?

А в пространстве?

- У нас $f(\mathbf{r}_i) = |(\mathbf{a}, \mathbf{r}_i)|$, $\mathbf{r}_i \in \mathbb{S}^n$
- $\sum |(\mathbf{a}, \mathbf{r}_i)| \Delta S_i = \sum a \Delta S_i \cos \varphi_i = \sum a \cdot \text{pr}_{\mathbf{a}^\perp} \Delta S_i = a \cdot 2S(\mathbb{D}^2) = 2\pi a$
- $\langle f \rangle = \frac{1}{4\pi} \cdot 2\pi a = \frac{a}{2}$
- **Бинго!**

Ну и тогда...

Одна фигура внутри другой

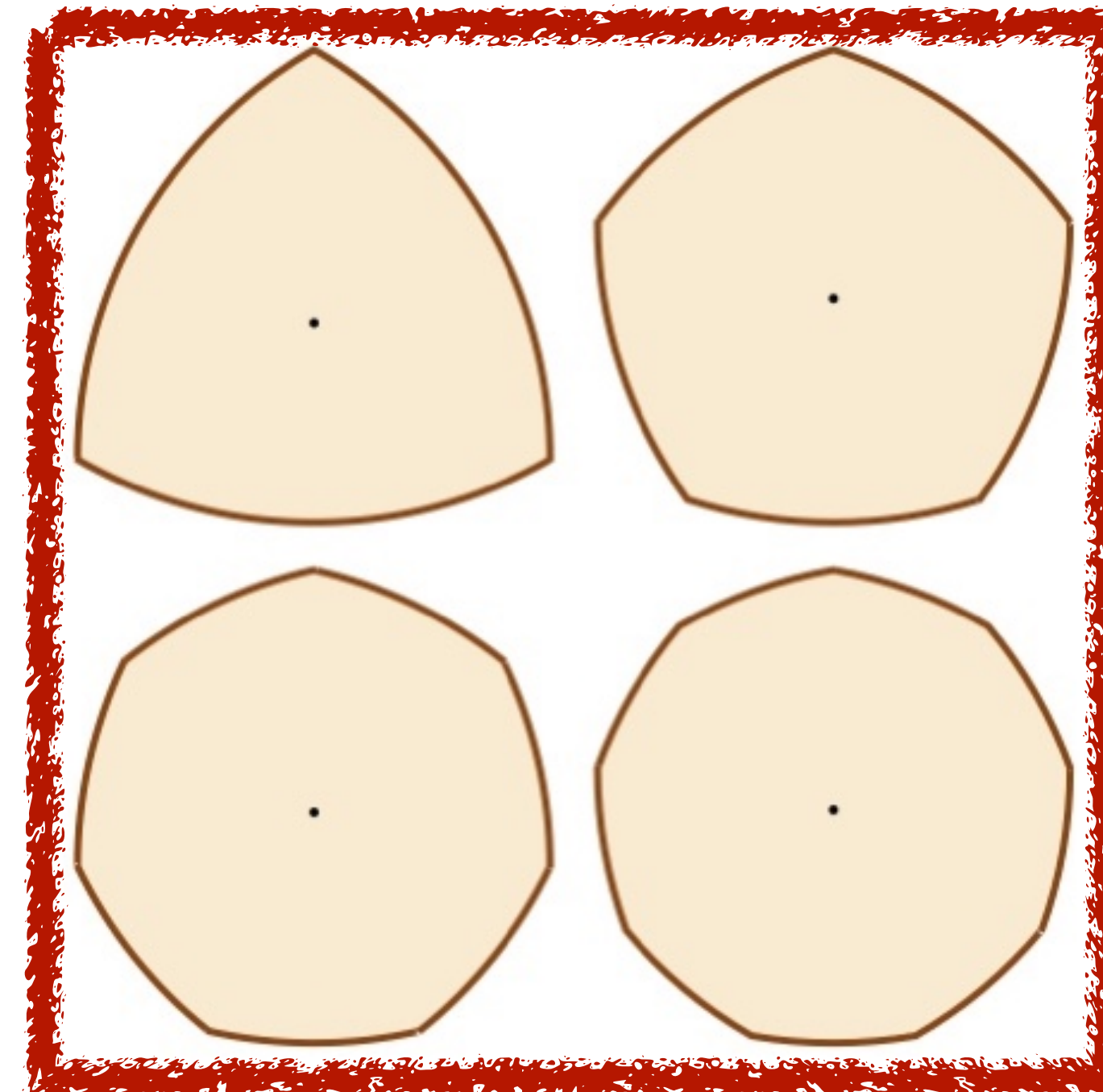
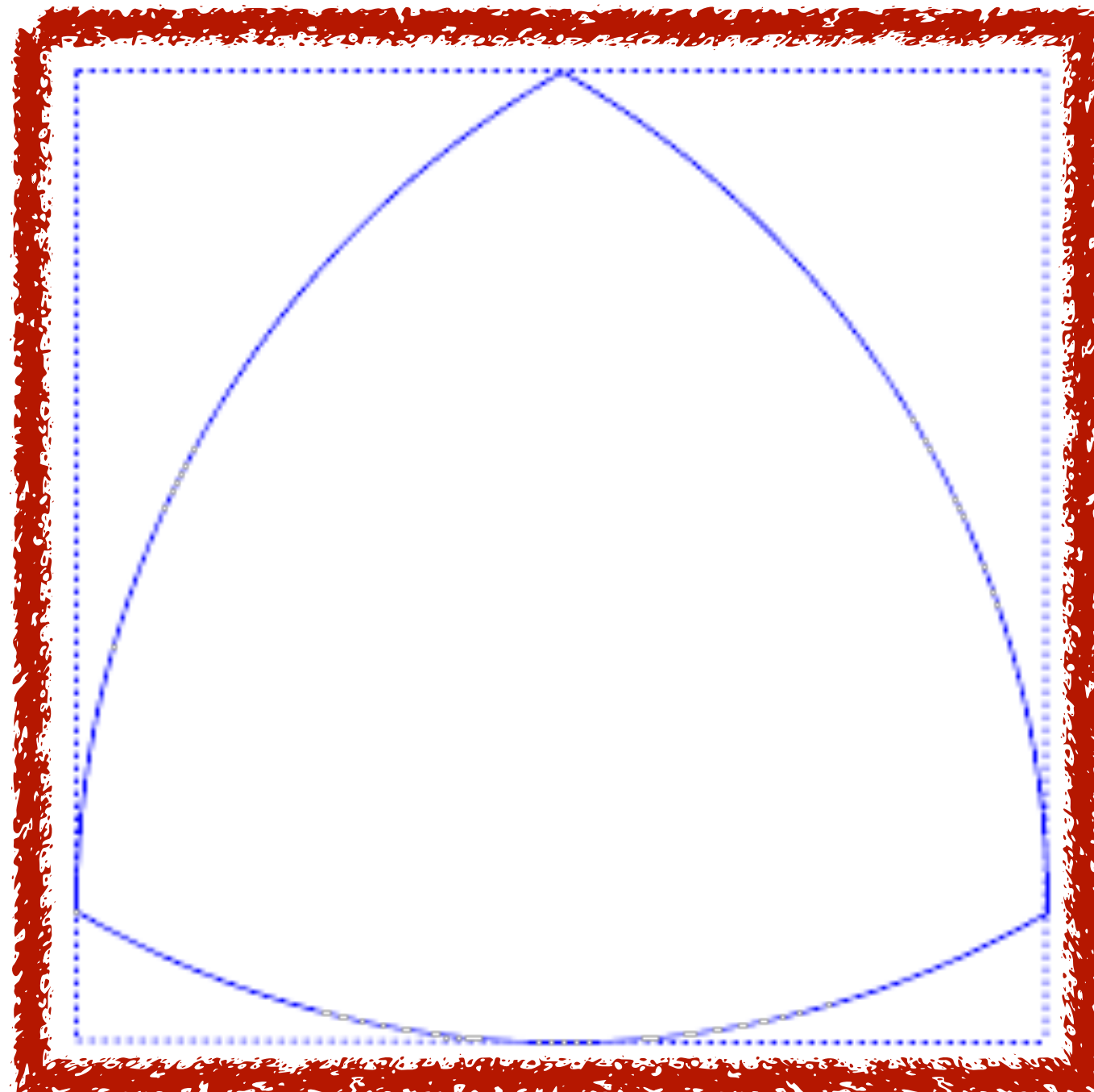
- **Задача.** Одна выпуклая фигура лежит внутри другой. Докажите, что периметр внутренней фигуры меньше одного для внешней.

Задача о длине побережья

- **Задача.** Расстояние между двумя самыми далёкими друг от друга точками побережья моря равно 1 000 км. Найдите наилучшую оценку длины его береговой линии

Фигуры постоянной ширины

- **Задача.** Каков периметр фигуры постоянной ширины d ?



Обобщения для \mathbb{R}^3

- Как можно обобщить задачи выше?