Симметрические многочлены

Малый мехмат

Многочлены

- Многочлен от n переменных это конечная сумма мономов $a_{k_1 \dots k_n} x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n}$, где $k_i \geqslant 0$
- **Пример.** $x_1^{10} + x_2 x_3 x_5^7 - 1$
- Если коэффициенты $a_{k_1 \dots k_n} \in \mathbb{R}$ многочлена P, то будем писать $P \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$
- Многочлены образуют **алгебру:**
- В алгебре можно брать линейные комбинации и перемножать любые элементы, причём умножение согласовано со сложением правилом дисьрибутивности: $P(Q + R) = PQ + PR$, $\forall P, Q, R \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$
- Эта алгебра коммутативна, т. е. в ней $PQ = QP$

Симметрические многочлены

- Многочлен из $\mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$ называется симметрическим, если он не меняется как многочлен от перестановки своих аргументов
- **Пример.** $P(x_1, \ldots, x_n) \equiv 0$ – симметрический многочлен
- **Пример.** $P(x) = x$
- **Пример.** $P(x, y) = x + y$
- **Упражнение.** $(x_1 + x_2 - x_3 - x_4)(x_1 - x_2 + x_3 - x_4)(x_1 - x_2 - x_3 + x_4)$ – тоже
- (+ + – –) (+ – + –) (+ – – +) → (+ + – –) (– + + –) (– + – +) → …(+ – – +) (+ – + –)

Симметрические многочлены

- **Задача.** На доске написаны числа $1,\ 1/2,\ 1/3,\ \ldots,\ 1/n$ для некоторого натурального $n \geqslant 2$. За раз любые два числа $a,\ b$ стирают и вместо них записывают значение выражения $a + b + ab$. С полученным набором чисел он проделывает то же самое, пока у него не останется одно число. Что это может быть за число?

Элементарные симметрические многочлены

- $\sigma_0 = 1$
- $\sigma_1 = x_1 + \ldots + x_n$
- $\sigma_2 = \sum_{i_1 < i_2} x_{i_1} x_{i_2}$ – сумма всех перестановок по 2
- $\sigma_k = \sum_{i_1 < \ldots < i_k} x_{i_1} \ldots x_{i_k}$
- $\sigma_n = x_1 \ldots x_n$
- Пример. $\mathbb{R}[x_1, x_2]$: $\sigma_1 = x_1 + x_2$, $\sigma_2 = x_1 x_2$
- **Пример.** $\mathbb{R}[x_1, x_2, x_3]$: $\sigma_1 = x_1 + x_2 + x_3$, $\sigma_2 = x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3$, $\sigma_3 = x_1 x_2 x_3$

Основная теорема о симметрических многочленах

- **Теорема о симметрических многочленах.** Любой симметрический многочлен – есть некоторый многочлен от $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$. (Или: он лежит в алгебре $\mathbb{R}[\sigma_1, \ldots, \sigma_n]$)
- **Доказательство** смотрите, например, в книге **«Курс алгебры» Э. Б. Винберга**

Выражения степенных сумм $s_n = x^n + y^n + z^n$ через $\sigma_1,\ \sigma_2,\ \sigma_3$

s_0	3	s_8	$\sigma_1^8 - 8\sigma_1^6\sigma_2 + 20\sigma_1^4\sigma_2^2 - 16\sigma_1^2\sigma_2^3 + 2\sigma_2^4 + 8\sigma_1^5\sigma_3 -$
s_1	σ_1		$- 32\sigma_1^3\sigma_2\sigma_3 + 12\sigma_1^2\sigma_3^2 + 24\sigma_1\sigma_2^2\sigma_3 - 8\sigma_2\sigma_3^2$
s_2	$\sigma_1^2 - 2\sigma_2$	s_9	$\sigma_1^9 - 9\sigma_1^7\sigma_2 + 27\sigma_1^5\sigma_2^2 - 30\sigma_1^3\sigma_2^3 + 9\sigma_1\sigma_2^4 +$
s_3	$\sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3$		$+ 9\sigma_1^6\sigma_3 - 45\sigma_1^4\sigma_2\sigma_3 + 54\sigma_1^2\sigma_2^2\sigma_3 + 18\sigma_1^3\sigma_3^2 -$
s_4	$\sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 2\sigma_2^2 + 4\sigma_1\sigma_3$		$- 9\sigma_2^3\sigma_3 - 27\sigma_1\sigma_2\sigma_3^2 + 3\sigma_3^3$
s_5	$\sigma_1^5 - 5\sigma_1^3\sigma_2 + 5\sigma_1\sigma_2^2 + 5\sigma_1^2\sigma_3 - 5\sigma_2\sigma_3$	s_{10}	$\sigma_1^{10} - 10\sigma_1^8\sigma_2 + 35\sigma_1^6\sigma_2^2 - 50\sigma_1^4\sigma_2^3 + 25\sigma_1^2\sigma_2^4 -$
s_6	$\sigma_1^6 - 6\sigma_1^4\sigma_2 + 9\sigma_1^2\sigma_2^2 - 2\sigma_2^3 +$		$- 2\sigma_2^5 + 10\sigma_1^7\sigma_3 - 60\sigma_1^5\sigma_2\sigma_3 + 100\sigma_1^3\sigma_2^2\sigma_3 +$
	$+ 6\sigma_1^3\sigma_3 - 12\sigma_1\sigma_2\sigma_3 + 3\sigma_3^2$		$+ 25\sigma_1^4\sigma_3^2 - 40\sigma_1\sigma_2^3\sigma_3 - 60\sigma_1^2\sigma_2\sigma_3^2 +$
s_7	$\sigma_1^7 - 7\sigma_1^5\sigma_2 + 14\sigma_1^3\sigma_2^2 - 7\sigma_1\sigma_2^3 +$		$+ 10\sigma_1\sigma_3^3 + 15\sigma_2^2\sigma_3^2$
	$+ 7\sigma_1^4\sigma_3 - 21\sigma_1^2\sigma_2\sigma_3 + 7\sigma_1\sigma_3^2 + 7\sigma_2^2\sigma_3$	. . .	. . . .

Теорема Виета

- **Задача.** Многочлен $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$ имеет n корней в $\mathbb{R}$ (или в $\mathbb{C}$): $x_1, \ldots, x_n$. Пусть $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ – элементарные симметрические многочлены, составленные от x_i. Докажите, что $a_k = (-1)^{n-k}\sigma_{n-k}$ для любого $0 \leqslant k < n$
- **Следствие.** Теоремы Виета для квадратного и кубического уравнений
- $(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n)$ – метод пристального взгляда

Теорема Виета

- **Задача.** Уравнение $x^3 + ax^2 + bx + c$ имеет 3 положительных действительных корня. Докажите, что $a^3 - 27c \leqslant 0$
- $-a = x_1 + x_2 + x_3$
- $-c = x_1x_2x_3$
- $\frac{1}{3}(a + b + c) \geqslant \sqrt[3]{abc}$
- $-\frac{a}{3} \geqslant \sqrt[3]{-c}$

Теорема Виета

- **Задача.** Про три действительных числа известно, что их сумма обратна сумме их обратных величин и равна S. Докажите, что среди этих трёх чисел найдётся хотя бы одно, равное S
- $\begin{cases} x+y+z=a, \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{a} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y+z=a, \\ a(xy+yz+xz)=xyz \end{cases}$
- $\Rightarrow \xi^3 - a\xi^2 + b\xi - ab = 0$
- $(\xi^2+b)(\xi-a)=0$

Теорема Виета

- **Задача.** Найдите все такие действительные числа a, такие, что
$$\begin{cases} x + y + z = a, \\ x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \\ x^3 + y^3 + z^3 = a^3 \end{cases}$$
- Из первых двух следует, что $\sigma_2 = xy + yz + xz = 0$
- Из третьего, очевидно, $\sigma_3 = 0$
- Мы имеем многочлен $\xi^3 - a\xi^2$, а у него понятно, какие корни…

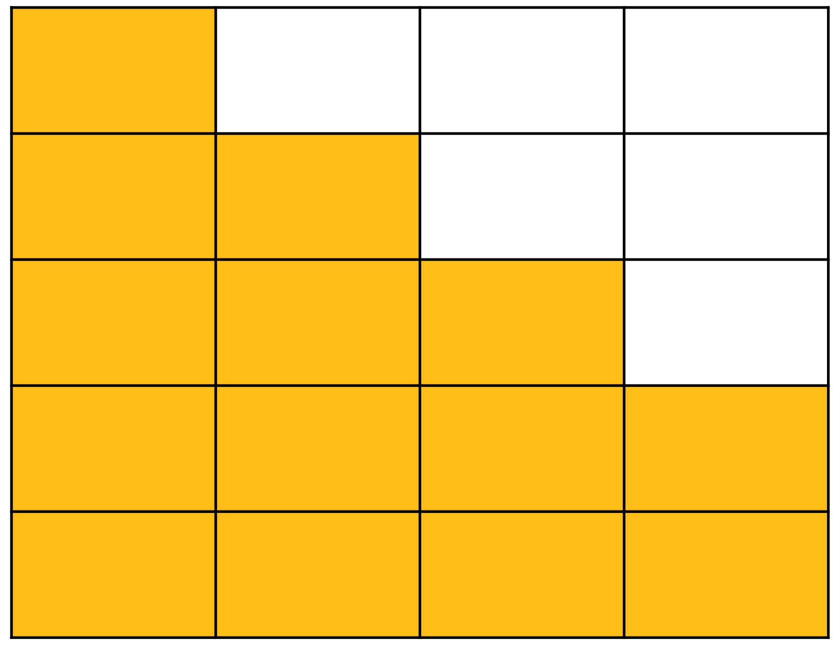
Неравенство Мюрхеда

- В первой задаче при решении использовалось классическое неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим (AM-GM) $\frac{1}{3}(a+b+c) \geqslant \sqrt[3]{abc}$ или $\frac{a^3+b^3+c^3}{3} \geqslant abc$
- Это пример неравенства Мюрхеда
- **Ещё пример.** Для любых положительных чисел $a^4+b^4+c^4+d^4 \geqslant \frac{2}{3}\left(a^2b^2+a^2c^2+a^2d^2+b^2c^2+b^2d^2+c^2d^2\right)$, причём равенство достигается только при $a=b=c=d$

Неравенство Мюрхеда

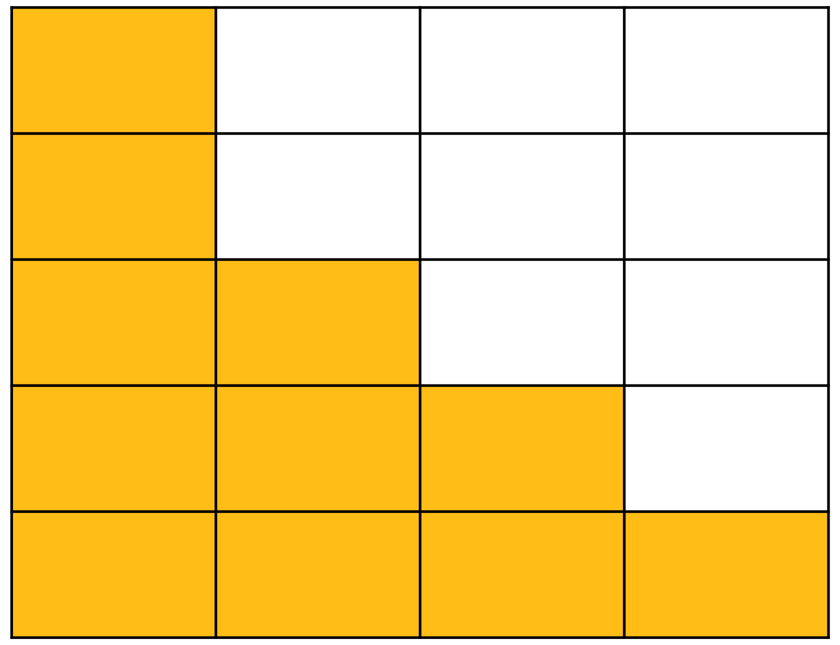
- Будем рассматривать убывающие разбиения чисел $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, где $|\lambda| = \lambda_1 + \ldots + \lambda_n$ – **вес разбиения** и $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_n \geqslant 0$
- Будем изображать эти разбиения в виде ступенек
- Это **диаграммы Юнга**
- Будем говорить, что $\lambda \geqslant \mu$, если $\lambda_1 + \ldots \lambda_k \geqslant \mu_1 + \ldots + \mu_k$

для любого $k = 1, \ldots, n$ – λ мажорирует μ, т. е.



(4, 4, 3, 2, 1)
вес = 14

$$\lambda_1 \geqslant \mu_1$$
$$\lambda_1 + \lambda_2 \geqslant \mu_1 + \mu_2$$
$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \geqslant \mu_1 + \mu_2 + \mu_3$$
$$\ldots$$
$$\lambda_1 + \ldots + \lambda_n \geqslant \mu_1 + \ldots + \mu_n$$



(4, 3, 2, 1, 1)
вес = 11

Неравенство Мюрхеда

- Определим также суммы

$$M_\lambda(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} x_1^{\lambda_{\sigma(1)}} \ldots x_n^{\lambda_{\sigma(n)}}$$

- Это многочлен степени $\lambda_1 + \ldots + \lambda_n = |\lambda|$
- **Вопрос.** Какой многочлен будет соответствовать разбиению $\lambda = (1,1,...,1)$?
- $M_\lambda(x_1, \ldots, x_n) = x_1 \ldots x_n$
- **Вопрос.** Какой многочлен будет соответствовать разбиению $(n,0,...,0)$?
- $M_\lambda(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{n}(x_1 + \ldots + x_n)$

Теорема. (Мюрхед) Для всех положительных $x = (x_1, \ldots, x_n)$:

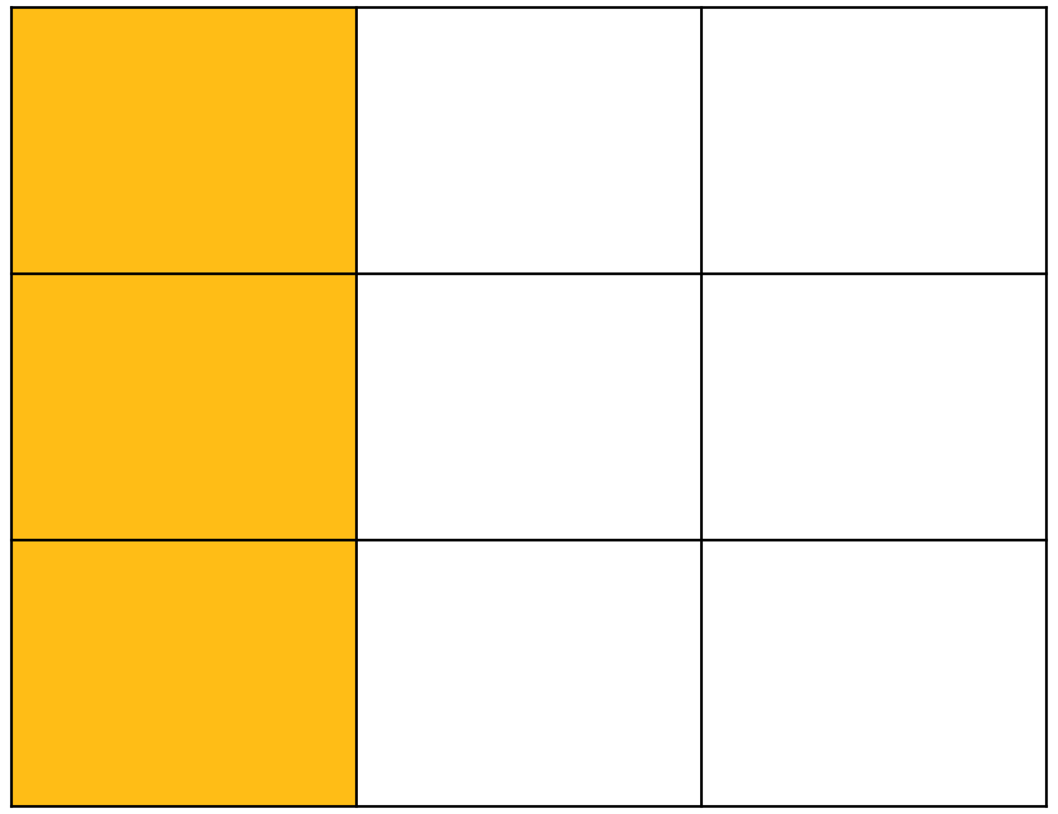
$$\boldsymbol{M_\lambda(x) \geqslant M_\mu(x) \Leftrightarrow |\lambda| = |\mu|, \lambda \geqslant \mu.}$$

Равенство достигается лишь в случае

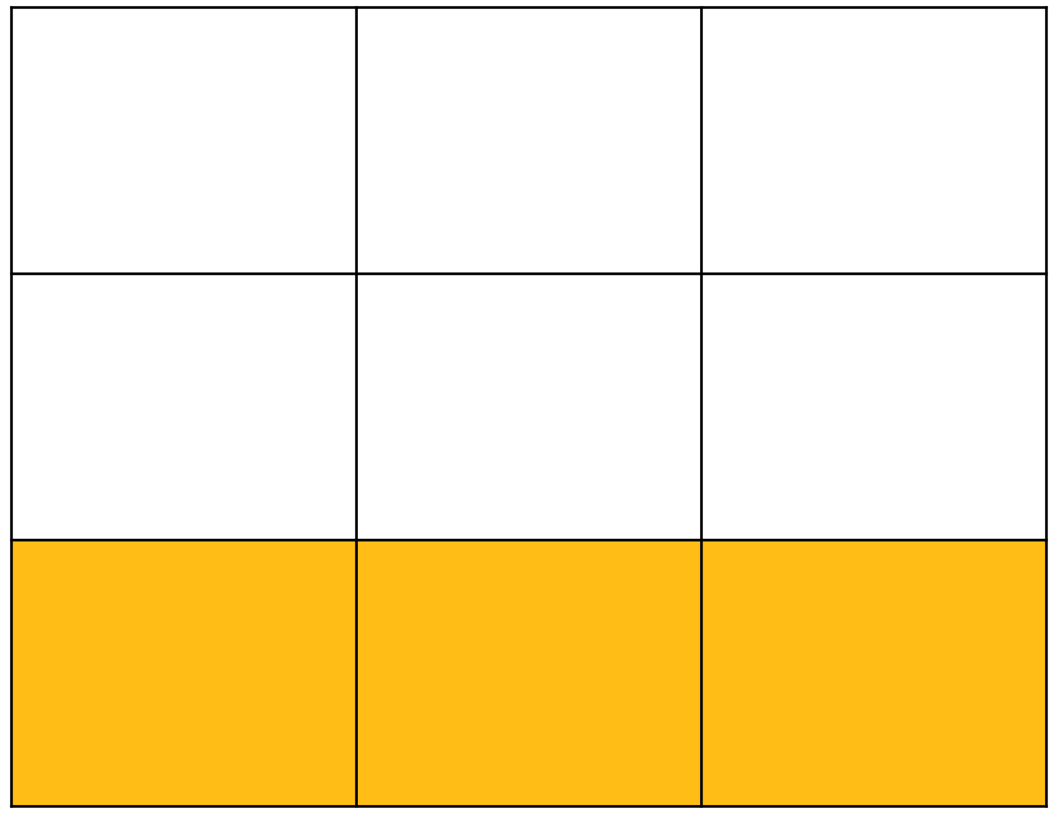
$$|\lambda| = |\mu|, x_1 = \ldots = x_n$$

Пример: AM-GM

- $\dfrac{a^3 + b^3 + c^3}{3} \geqslant abc$
- $(3,\ 0,\ 0) \geqslant (1,\ 1,\ 1)$



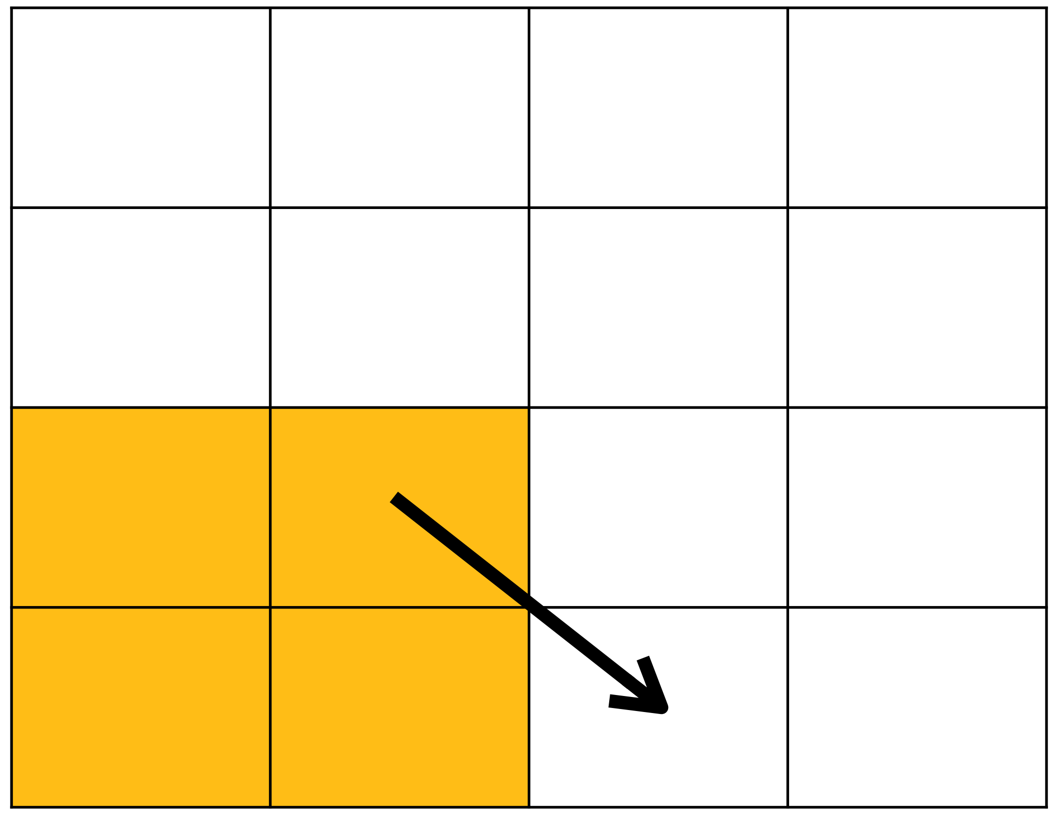
(1, 1, 1)
вес = 3



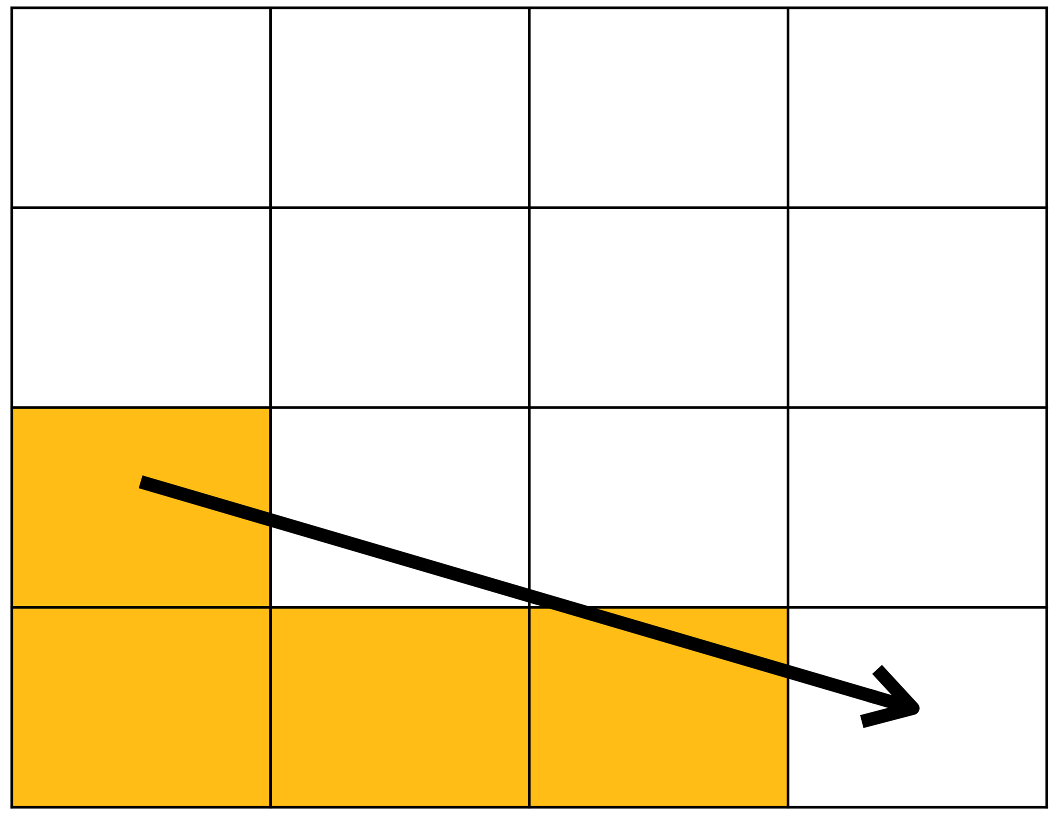
(3, 0, 0)
вес = 3

Пример

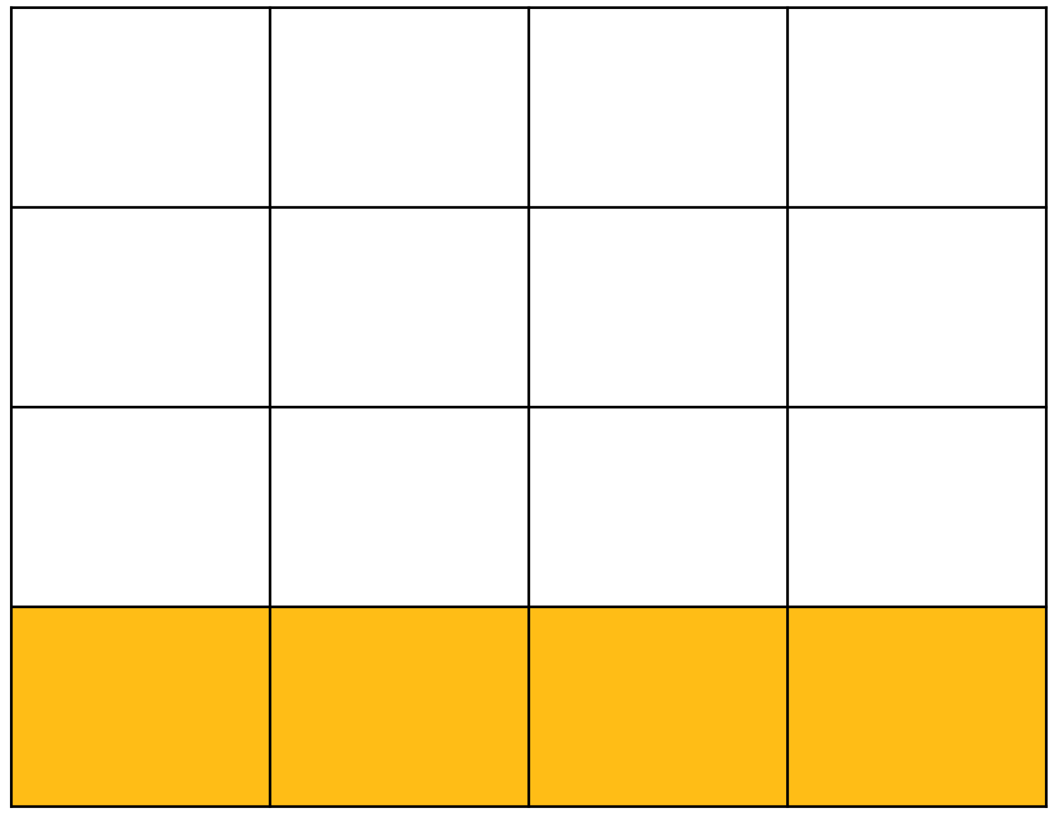
- $a^4 + b^4 + c^4 + d^4 \geqslant \frac{2}{3}\left(a^2b^2 + a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2 + c^2d^2\right)$
- $(4,\ 0,\ 0,\ 0) > (2,\ 2,\ 0,\ 0)$



(2, 2, 0, 0)
вес = 4



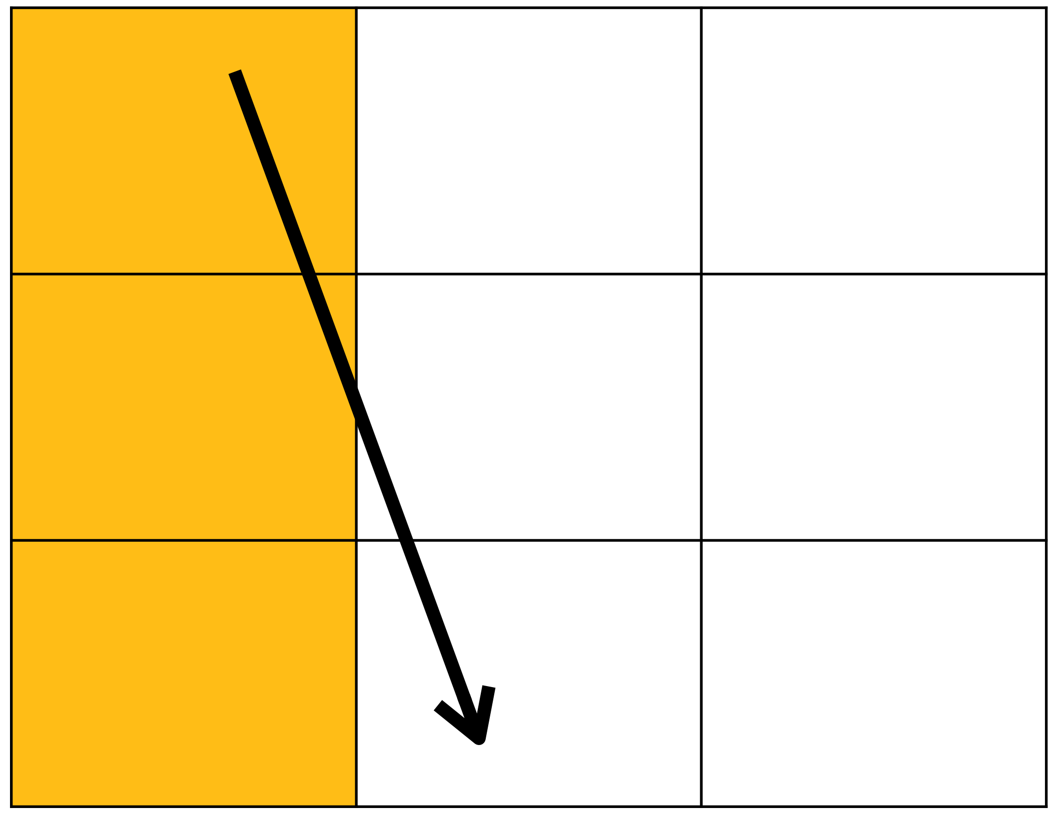
(3, 1, 0, 0)
вес = 4



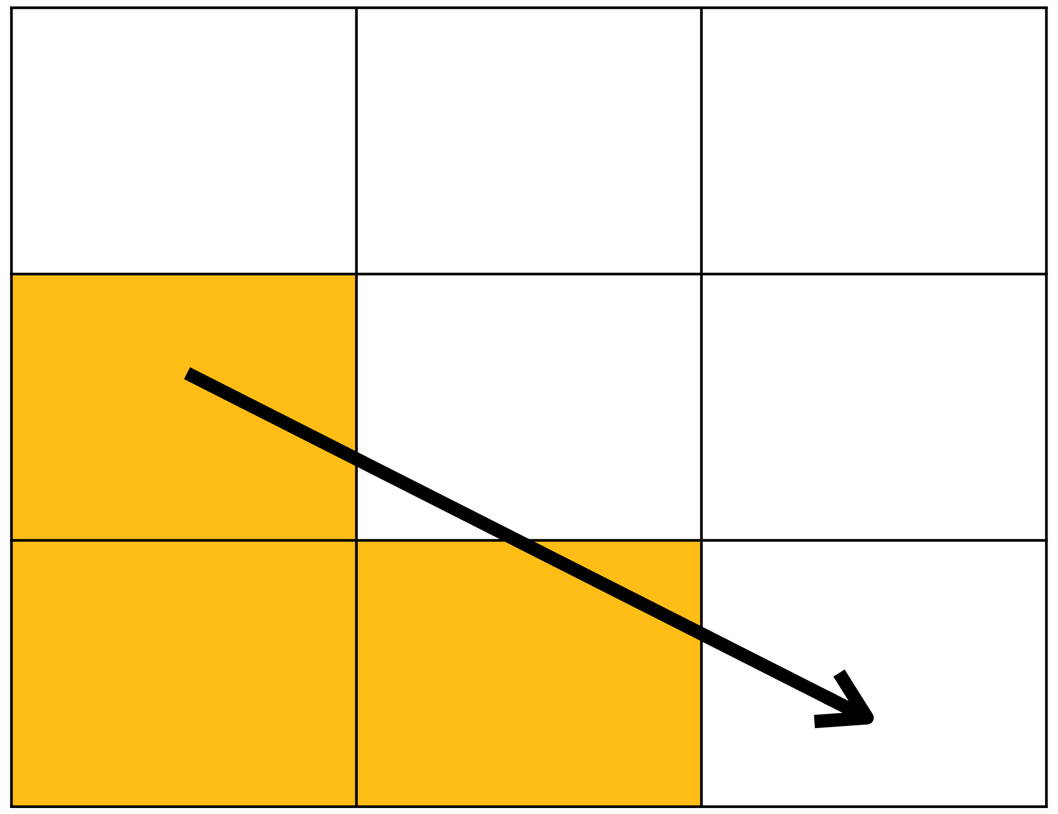
(4, 0, 0, 0)
вес = 4

Сваливаем кирпичи!

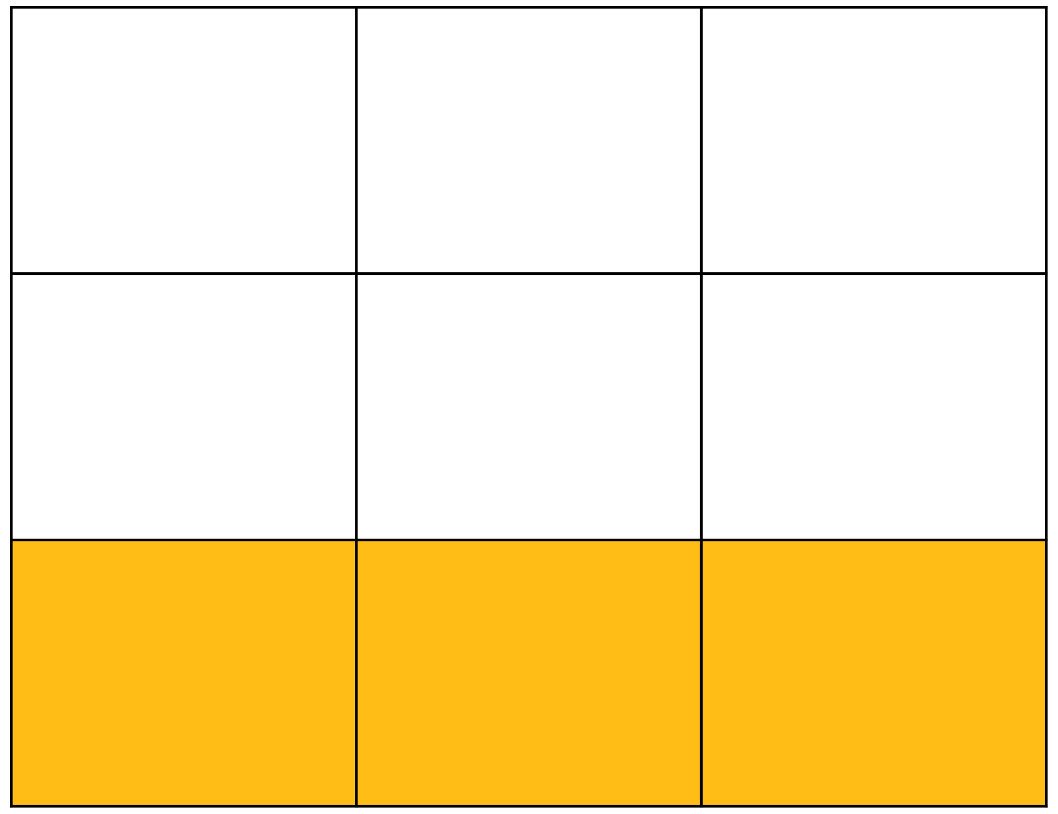
- $\dfrac{a^3+b^3+c^3}{3} \geqslant abc$



(1, 1, 1)
вес = 3



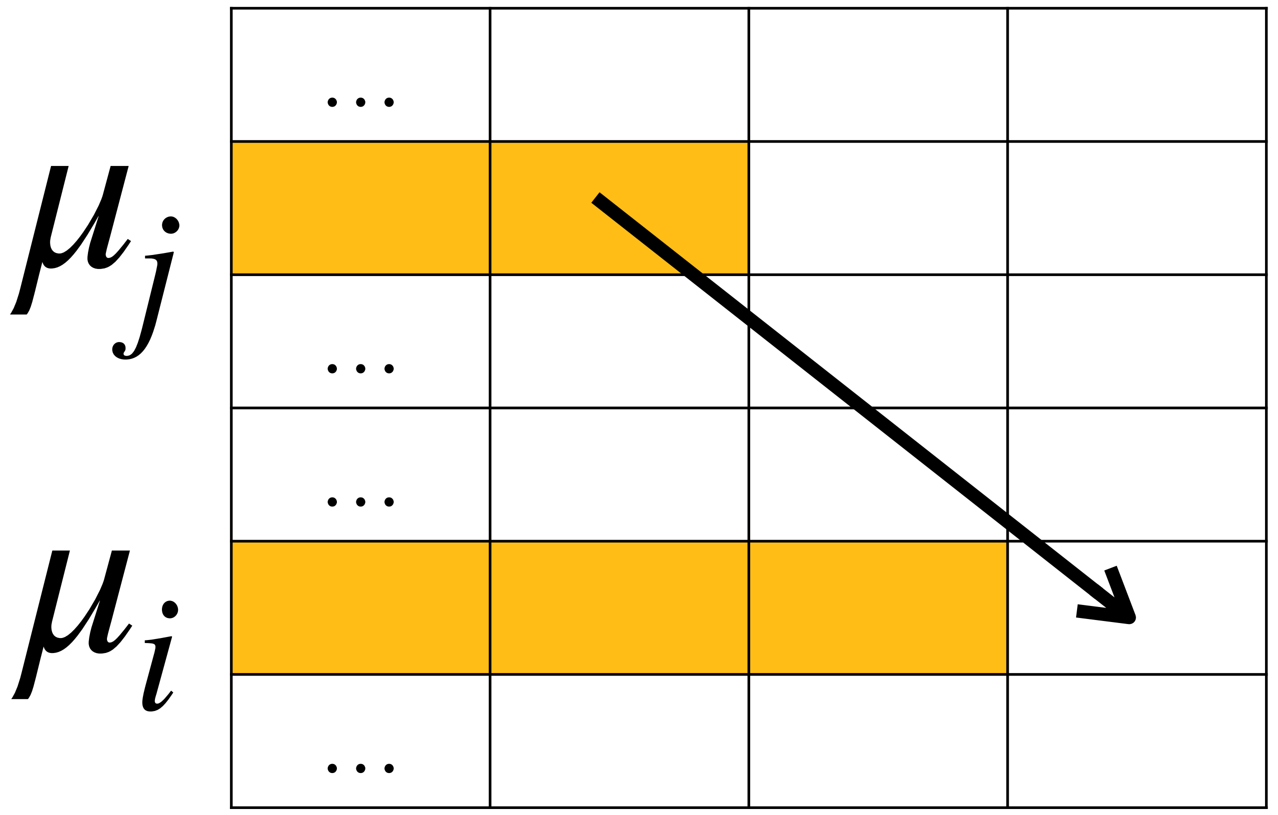
(2, 1, 0)
вес = 3



(3, 0, 0)
вес = 3

Доказательство

- Пусть $|\lambda| = |\mu|$ и $\lambda \geqslant \mu$.
- Введём операцию сваливания кирпича R_{ij}, превращающую набор μ в набор μ'
- Пусть $\mu_i \geqslant \mu_j > 0$, где $i < j$ – иначе кирпич не свалишь
- Тогда $\mu'_i = \mu_i + 1$, $\mu'_j = \mu_j - 1$ и $\mu_k = \mu'_k$ для остальных



Доказательство

- **Лемма 1.** Если $\lambda = R_{ij}\mu$, то $M_\lambda(x) \geqslant M_\mu(x)$, равенство – при равных переменных
- $\triangleright$ Для каждой пары индексов p и q, где $1 \leqslant p < q \leqslant n$, в $M_\lambda(x) - M_\mu(x)$ входит сдагаемое
- (что-то там) $\cdot \left(x_p^{\lambda_i}x_q^{\lambda_j} + x_q^{\lambda_i}x_p^{\lambda_j} - x_p^{\mu_i}x_q^{\mu_j} - x_q^{\mu_i}x_p^{\mu_j}\right) =$
- (что-то там) $\cdot \left(x_p^{\mu_i+1}x_q^{\mu_j-1} + x_q^{\mu_i+1}x_p^{\mu_j-1} - x_p^{\mu_i}x_q^{\mu_j} - x_q^{\mu_i}x_p^{\mu_j}\right) =$
- (что-то там) $\cdot \left(x_px_q\right)^{\mu_j-1}\left(x_p - x_q\right)\left(x_p^{\mu_i+1-\mu_j} - x_q^{\mu_i+1-\mu_j}\right) \geqslant 0 \ \triangleleft$

Доказательство

- **Лемма 2.** Если $\lambda \geqslant \mu$ и $|\lambda| = |\mu|$, но $\lambda \neq \mu$, то λ можно получить из μ с помощью конечного числа преобразований R_{ij}, т. е. сбросив несколько кирпичей.
- $\triangleright$ Пусть i – наименьший такой индекс, что $\lambda_i \neq \mu_i$. Тогда $\lambda \geqslant \mu \Rightarrow \lambda_i > \mu_i$
- $|\lambda| = |\mu| \Leftrightarrow \sum (\lambda_k - \mu_k) = 0 \Rightarrow \exists j: \ \lambda_j < \mu_j$
- $i < j,\ \mu_j > 0 \Rightarrow$ можно сбросить кирпич, т. е. применить преобразование R_{ij} к μ
- $R_{ij}\mu = \nu$, где $\nu_i = \mu_i + 1,\ \nu_j = \mu_j - 1,\ \nu_k = \mu_k,\ k \neq i, j$
- $|\lambda_i - \mu_i| = |\lambda_i - \nu_i| + 1,\ |\lambda_j - \mu_j| = |\lambda_j - \nu_j| + 1$
- Значит, $\sum |\lambda_k - \mu_k| = \sum |\lambda_k - \nu_k| - 2 \triangleleft$
- **Задача.** Завершите доказательство, доказав обратное утверждение. $\square$

Доказательство

- **Задача.** Докажите обратуную импликацию и завершите доказательство $\square$