1 Алгебра кватернионов

Определение 1. *Кватернионом* q называется выражение $q = a+bi+cj+dk$, где $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, i, j, k — мнимые единицы, т. е. $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$.

Рассмотрим множество $\mathbb{H}$ (в честь их открывателя Уильяма Гамильтона) всех кватернионов и введём на нём операции сложения и умножения. Сложение определяется покомпонентно (кватернионы — это 4-мерные векторы над $\mathbb{R}$). А умножение доопределяется с мнимых единиц по ассоциативности и дистрибутивности.

Задача 1. Докажите, что $ij = k,\ jk = i,\ ki = j$.

Данному кватерниону $q = a + bi + cj + dk$ сопоставим *сопряжённый кватернион* $\overline{q} = a - bi - cj - dk$.

Задача 2. Докажите, что $q\overline{q} = \overline{q}q = a^2+b^2+c^2+d^2 = |q|^2$ — это квадрат длины кватерниона, как 4-мерного вектора.

Задача 3. Докажите, что $\overline{ab} = \overline{a}\overline{b}$, $a,\ b \in \mathbb{H}$. Выведите отсюда, что $|ab| = |a| \cdot |b|$.

Задача 4. Докажите, что $\mathbb{H}\backslash\{0\}$ — это группа относительно умножения. В этой задаче содержательным является проверка того, что элементы этого множества обратимы по умножению, т. е. для любого q есть q^{-1}, такой, что $qq^{-1} = q^{-1}q = 1$.

Задача 5. Приведите пример неабелевой группы из 8 элементов.

Задача 6. Решите уравнение $x^2 + 1 = 0$ в кватернионах. Что представляет собой множество решений в $\mathbb{R}^4$?

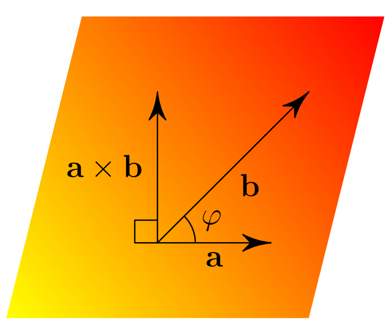
2 Векторное произведение

Определение 2. *Векторным произведением* двух векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ называется вектор $\mathbf{a}\times\mathbf{b} = [\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \mathbf{c}$, такой, что:

1) он перпендикулярен плоскости, содержащей векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$;

2) он смотрит в такую сторону, что направление кратчайшего вращения от вектора $\mathbf{a}$ до вектора $\mathbf{b}$ происходит в положительном направлении (т. е. против часовой стрелки);

3) его длина $|\mathbf{c}| = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \sin\varphi$, где φ — угол между векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}$, отсчитываемый в положительном направлении.



Задача 7. Найдите формулу для выражения векторного произведения векторов в прямоугольной системе координат.

Задача 8. Докажите следующие тождества:

1. (Линейность) $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}$.

2. (Кососимметричность) $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$.

3. («Бац минус цаб») $[\mathbf{a}, [\mathbf{b}, \mathbf{c}]] = \mathbf{b}(\mathbf{a}, \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$.

4. (Тождество Якоби) $[\mathbf{a}, [\mathbf{b}, \mathbf{c}]] + [\mathbf{b}, [\mathbf{c}, \mathbf{a}]] + [\mathbf{c}, [\mathbf{a}, \mathbf{b}]] = 0$.

Пример 1 (Сила Лоренца)**.** На движущуюся со скоростью $\mathbf{v}$ заряженную частицу с зарядом q в магнитном поле индукции $\mathbf{B}$ действует сила $\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$. Если поле постоянно, то траектория движения частицы — окружность.

Пример 2 (Момент импульса и момент силы)**.** Определим *момент* $\mathbf{M}$ *силы* $\mathbf{F}$ относительно некоторой точки O, как

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}.$$

Также определим момент импульса тела массой m относительно точки O:

$$\mathbf{K} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v}.$$

Рассмотрим твёрдое тело, на которое действуют некоторые силы $\mathbf{F}_i$. Его движение можно описать, зная, как движется его центр масс, а также зная, как оно вращается:

$$\begin{cases} \dfrac{d\mathbf{P_c}}{dt} = \sum \mathbf{F}_i, \\ \dfrac{d\mathbf{K}}{dt} = \sum \mathbf{M}_i. \end{cases}$$

Здесь $\mathbf{P}_c$ — импульс центра масс. Отсюда, очевидно, следуют условия равновесия для твёрдого тела:

$$\begin{cases} \sum \mathbf{F}_i = 0, \\ \sum \mathbf{M}_i = 0. \end{cases}$$

Задача 9. Докажите, что для чисто мнимых кватернионов (т. е. без действительной части) a и b:

$$ab = (\mathbf{a}, \mathbf{b}) + [\mathbf{a}, \mathbf{b}],$$

т. е. их произведение — это сумма скалярного и векторного произведений соответствующих 3-мерных векторов.

3 Описание вращений $\mathbb{R}^3$ с помощью кватернионов

Кватернионы дают элегантный способ описания вращения вокруг осей в трёхмерном пространстве.

Мы будем рассматривать вращения относительно прямых, проходящих через нуль.

Сопоставим данной точке $A = (A_1, A_2, A_3)$ трёхмерного пространства её радиус вектор $\mathbf{r}_A = (A_1, A_2, A_3)$, а ему, в свою очередь, чисто мнимый кватернион $a = A_1 i + A_2 j + A_3 k$. Также рассмотрим произвольный кватернион единичной длины q ($q\overline{q} = 1$). В последствии будем отождествлять векторы из $\mathbb{R}^3$ и чисто мнимые кватернионы.

Задача 10. Докажите, что $qa\overline{q}$ — это тоже чисто мнимый кватернион, где q — произвольный кватернион единичной длины, a — чисто мнимый кватернион единичной длины.

Таким образом, корректно определено отображение

$$\begin{gathered} f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \\ a \mapsto qa\overline{q}, \end{gathered}$$

переводящее чисто мнимые кватернионы в чисто мнимые кватернионы, а поэтому $\mathbb{R}^3$ в себя. Очевидно, что f — это линейное отображение (оператор) над $\mathbb{R}$, т. е. $f(\alpha a+\beta b) = \alpha f(a)+\beta f(b)$ для любых $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{H}$.

Задача 11. Докажите, что отображение f сохраняет длины векторов.

Значит, отображение f есть некое движение. Но что это за движение? На самом деле, это вращение вокруг оси, проходящей через нуль! Ниже это предлагается доказать.

Для данного единичного вектора u рассмотрим кватернион

$$q = \cos\frac{\alpha}{2} + u\sin\frac{\alpha}{2}.$$

Ему сопоставим отображение $f_u(v) = qv\overline{q}$.

Задача 12. Докажите, что построенное отображение f_u трёхмерного пространства в себя является поворотом вокруг оси, параллельной вектору u, на угол α. Также докажите, что любое вращение трёхмерного пространства представляется в виде f_u для некоторого u (причём такой u неединственнен).

Упражнение 1. Напишите явно формулы, выражающие в кватернионах повороты вокруг осей координат.

Задача 13. Докажите, что композиция вращений вокруг осей, проходящих через начало координат — это тоже поворот относительно некоторой оси.

Заметим, что мы получили отображение, сопоставляющее кватерниону единичной длины q (заметьте, что этот вектор лежит на трёхмерной сфере $\mathbb{S}^3$ с центром в начале координат) поворот f_u относительно оси, проходящей через начало координат, т. е. мы получили некоторое отображение $\varphi : \mathbb{S}^3 \to SO(3)$, где $\mathbb{S}^3$ — кватернионы единичной длины (это группа по умножению), а $SO(3)$ — группа вращений пространства вокруг осей, проходящих через начало координат (в силу предыдущей задачи это действительно группа).

Задача 14. Докажите, что φ — гомоморфизм групп. Какое у него ядро?