Уравнения в целых числах. Линейные уравнения. Уравнения Пелля

На занятии мы обсудили, как описывается множество решений линейного диофантового уравнения $ax+by=c$, $(a,b)=1$. Достаточно найти хотя бы одно его решение (x_0,y_0), после этого решение представляется в виде $(x,y)=(x_0+tb, y_0-ta)$, где $t\in\mathbb{Z}$. Частное решение можно находить при помощи алгоритма Евклида для чисел a и b.

Мы определили, что такое *кольцо.* Кольцом называется множество R, на котором заданы операции сложения $+ : R\times R\to R$, вычитания $- : R\times R\to R$ и умножения $\cdot : R\times R\to R$. Кроме того, сложение и умножение коммутативны, т.е. $a☺b=b☺a$, ассоциативны, т. е. $(a☺b)☺c=a☺(b☺c)$, где $☺=+$ или $\cdot$. А также умножение связано с аддитивными операциями «правилом фонтанчика»: $a(b+c)=ab+bc$.

Пример 1. Кольцо целых чисел $\mathbb{Z}$.

Пример 2. Кольцо всех многочленов $\mathbb{Z}[x]$ с целыми коэффициентами, где сложение и умножение многочленов определены обычным образом.

Пример 3. Кольцо остатков по модулю n: $\mathbb{Z}_n$. Элементами этого кольца служат числа от 0 до $n-1$. Сложение и умножение происходит с последующим взятием остатка.

Пример 4. Рассмотрим множество $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]=\{x+\sqrt{d}y \mid x,y\in\mathbb{Z}\}$, где $d\in\mathbb{N}$ — фиксированное и не является точным квадратом. Сложение и умножение определяются, как и в случае действительных чисел (как обычно). Элементы кольца $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ можно записывать в виде пар (x,y). Тогда $(x_1,y_1)+(x_2,y_2)=(x_1+x_2,y_1+y_2)$, а вот умножение этих пар будет устроено хитрее. (Запишите соответствующую формулу).

Также мы стали рассматривать уравнение Пелля $x^2-dy^2=1$, где $d\in\mathbb{N}$ и число d не является точным квадратом. Оказывается, что его решения получаются так. Пусть существует решение (x_0,y_0), являющееся ближайшим к точке $(1,0)$. Посмотрим на это решение, как на элемент кольца $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$, т. е. сопоставим ему элемент $x+\sqrt{d}y$. Тогда все решения уравнения Пелля — это просто степени элемента (x_0,y_0) в смысле умножения кольца $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ (мы это доказали). Так что вся тяжесть решения уравнения Пелля состоит именно в нахождении такого решения (x_0,y_0). На занятии мы начали доказывать существование точки (x_0,y_0), и пока не успели это полностью сделать.

Мы также доказали **лемму 1** и сформулировали **лемму Минковского**.

Лемма 1. На клетчатой плоскости лежит клякса, площади больше 1. Тогда найдутся две точки кляксы, служащие началом и концом целочисленного вектора.

Лемма Минковского. На клетчатой плоскости расположена центрально-симметричная выпуклая фигура, площади больше 4 (центр симметрии — начало координат). Тогда эта фигура содержит целую точку, отличную от начала координат.

1. Решите в целых числах уравнения:

- **a.** $23x+34y=5$,
- **b.** $12x+34y+56z=7$,
- **c.** $x^2-2y^2=1$,
- **d.** в натуральных: $x!+y!=z!$ (внезапно).

2. Для элемента $x+\sqrt{d}y\in\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ его *весом* $N(x+\sqrt{d}y)$ назовём выражение x^2-dy^2. Докажите, что $N(\alpha\beta)=N(\alpha)N(\beta)$, где $\alpha,\ \beta\in\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$.

3. Говорят, что элемент a некоторого кольца R делится на $b \in R$, если существует такой элемент $c \in R$, что $a = bc$.

Пусть $M = N(x_2 + \sqrt{d}y_2)$. Докажите, что если $x_1 \equiv x_2 \pmod{N}$ и $y_1 \equiv y_2 \pmod{N}$, то тогда $x_1 + \sqrt{d}y_1$ делится на $x_2 + \sqrt{d}y_2$ (делимость понимается в смысле кольца $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$).

4. Во всех узлах целочисленной решетки, кроме одного, в котором находится охотник, растут деревья, стволы которых имеют радиус r. Докажите, что охотник не сможет увидеть зайца, находящегося от него на расстоянии больше $\dfrac{1}{r}$.

5. Дана бесконечная клетчатая бумага и фигура, площадь которой меньше площади клетки. Докажите, что эту фигуру можно положить на бумагу, не накрыв ни одной вершины клетки.