1 Действие группы на множестве и формула Бёрнсайда

Рассмотрим некоторое конечное множество X и конечную группу G. Каждому элементу g можно поставить в соответствие преобразование (будем его обозначать той же буквой) g множества X — оно переводит любой элемент $x \in X$ в какой-то элемент $gx \in X$ и является взаимно однозначным. Потребуем ещё, чтобы

$$(g_1 g_2)x = g_1(g_2 x)$$

для любых $x \in X,\ g \in G$. В данной ситуации говорят, что группа G *действует* на множестве X.

Пример 1. Рассмотрим правильный n–угольник на плоскости. Его можно вращать вокруг центра симметрии на углы $2\pi k/n$, $k = 0, ..., n-1$, и при этом он перейдёт в себя. Если теперь занумеровать его вершины, то мы увидим, как они переставляются при вращениях. В данном примере на вершины многоугольника действует группа вращений правильного многоульника.

Пример 2. Рассмотрим группу вращений куба. Она может действовать на множествах вершин, граней или рёбер куба, переставляя элементы в каждом множестве.

При действии группы G на множестве X можно рассмотреть следующее отношение эквивалентности: элемент x_1 эквивалентен элементу $x_2 \Leftrightarrow x_2 = gx_1$ для некоторого $g \in G$ (или $x_1 = gx_2$ — это равносильно предыдущему).

Пример 3. Мы составляем ожерелья из десяти бусин пяти цветов по модулю вращений.

Определение 1. *Орбитой* Gx элемента x называется множество

$$Gx = \{gx|\ g \in G\},$$

т. е. это все возможные элементы, которые получаются при действии на x всех элементов группы G.

Так вот, наше множество X разваливается на такие орбиты:

Задача 1. Докажите, что любые две орбиты или не пересекаются, или совпадают.

Определение 2. *Неподвижной точкой* данного преобразования g называется такой элемент $x \in X$, что $gx = x$.

Определение 3. *Стабилизатором* элемента $x \in X$ называется множество

$$\mathrm{St}(x) = \{g \in G|\ gx = x\}.$$

Задача 2. Докажите, что $\mathrm{St}(x)$ — подгруппа группы G.

Задача 3. Пусть точки x и y лежат в одной орбите группы G. Тогда преобразований из G, переводящих x в y, столько же, сколько преобразований в стабилизаторе элемента x.

Задача 4 (Формула орбит)**.** Докажите, что $|Gx| \cdot |\mathrm{St}(x)| = |G|$.

Задача 5. Докажите, что сумма порядков стабилизаторов точек из одной орбиты равна $|G|$.

Задача 6 (Формула Бёрнсайда)**.** Докажите, что число орбит

$$N = \sum_{g \in G} |X_g|,$$

где X_g — это неподвижные точки для элемента g.

2 Теорема Пойа

При помощи этой теоремы можно решать хитрые перечислительные задачи.

Элемент $g \in G$, действуя на множестве X, разбивает это множество на n_k орбит длины k, $k = 1, ..., s$.

Определение 4. *Цикловым индексом* I_g *элемента* $g \in G$ называется одночлен $z_1^{k_1} z_2^{k_2} ... z_s^{k_s}$.

Определение 5. *Цикловым индексом группы* G называется многочлен

$$P_G(z_1, z_2, ...) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} I_g(z_1, z_2, ...).$$

Пусть теперь X, Y — конечные множества, K — коммутативное кольцо, $w : Y \to K$ — *весовая функция*. Для каждой функций $f : X \to Y$ определим её *вес*

$$w(f) = \prod_{x \in X} w(f(x)).$$

Две функции $f_1 : X \to Y$ и $f_2 : X \to Y$ назовём *эквивалентными*, если существует такой преобразование $g \in G$, что

$$f_1(x) = f_2(gx)$$

для любого $x \in X$.

Пример 4. Проиллюстрируем эти определения на примере задачи о раскраске кубика: требуется сосчитать количество различных раскрасок граней кубика в чёрный и белые цвета (кубик можно вращать). В данной ситуации X — это множество граней, Y — чёрный и белый цвета, функции $f : X \to Y$ — раскраски граней кубика в чёрный и белый цвета, группа G — группа вращений кубика, в качестве кольца K возьмём кольцо многочленов $\mathbb{Z}[x, y]$ от двух переменных с целыми коэффициентами, причём $w(\text{белый}) = x$, а $w(\text{чёрный}) = y$. Тогда вес функции $w(f) = x^\alpha y^\beta$ — одночлен, в котором α — число белых граней, β — число чёрных граней. Эквивалентность функций здесь означает, что раскраски, получающиеся поворотами из уже имеющейся раскраски одинаковы.

Ясно, что множество всех функций $f : X \to Y$ распадается на классы эквивалентности причём веса функци из одного класса одинаковы, поэтому имеет смысл определить *вес* $W(F)$ *класса эквивалентности* F *функций* $f : X \to Y$.

Спредлива следующая мощная

Теорема 1 (John Redfield, George Pólya)**.** *Сумма весов классов эквивалентности равна*

$$\sum_F W(F) = P_G \left(\sum_{y \in Y} w(y), \sum_{y \in Y} (w(y))^2, ..., \sum_{y \in Y} (w(y))^k, ... \right).$$

Заметим, что если взять в качестве весовой функции тождественную единицу, т. е. $w(y) = 1$ для любого $y \in Y$, то слева в теореме будет стоять число классов эквивалентности множества всех функций, а справа — значение циклового индекса группы G на векторе $(|Y|, ..., |Y|, ...)$. Мы получили

Следствие 2. *Число классов эквивалентности равно*

$$P_G(|Y|, |Y|, ...).$$

Задача 7 (Число ожерелий)**. 1.** Ожерелья считаются *неразличимыми*, если одно может быть получено из другого поворотом. Сколько существует ожерелий из p — простого числа — бусин m цветов?

2. То же, что и в предыдущем пункте, но бусин уже n — любое натуральное число.

3. Выразите ответ в предыдущем пункте через сумму по делителям числа n и функцию Эйлера.

Задача 8 (Число ожерелий с отражениями)**.** Ожерелья считаются *неразличимыми*, если одно может быть получено из другого поворотом или отражением относительно какой-нибудь оси симметрии. Сколько существует различных ожерелий из n бусин m цветов?

Задача 9. Сколько существует ожерелий (их можно только поворачивать) из 18 бусин, среди которых 6 красных и 12 синих?

Задача 10. Сколькими способами ребёнок может раскрасить рёбра кубика в красный, синий и жёлтый цвета?

Задача 11. Сколько существует различных правильных тетраэдров, вершины которых раскрашены в n цветов (тетраэдр можно только крутить)? Проверьте ваш ответ для $n = 2$.

Задача 12. Сколькими способами на гранях куба можно расставить натуральные метки, дающие в сумме число n (куб можно только крутить)?