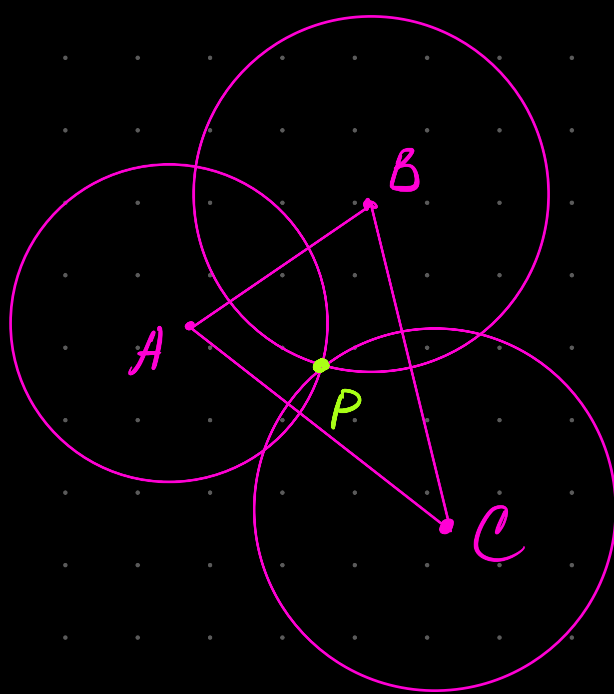
К теореме Шаля

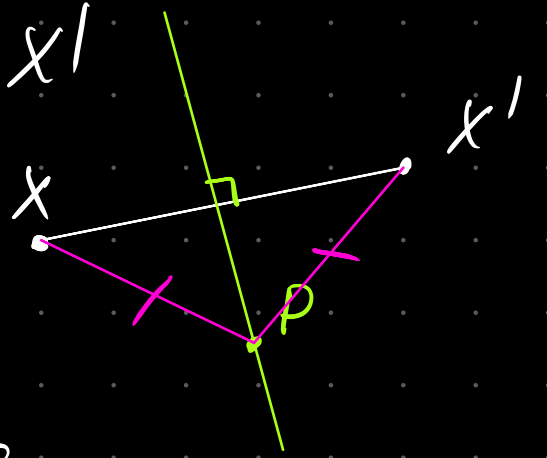
2) Лемма о трёх гвоздях

Точки A, B, C неподвижны.

Или из пункта 1) она тоже следует.



1) $\exists\, f(X)=X'$

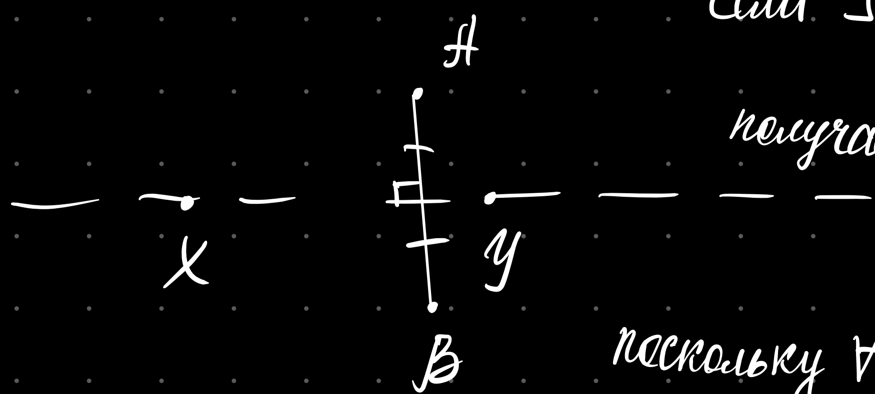


$\exists\, f(P)=P$

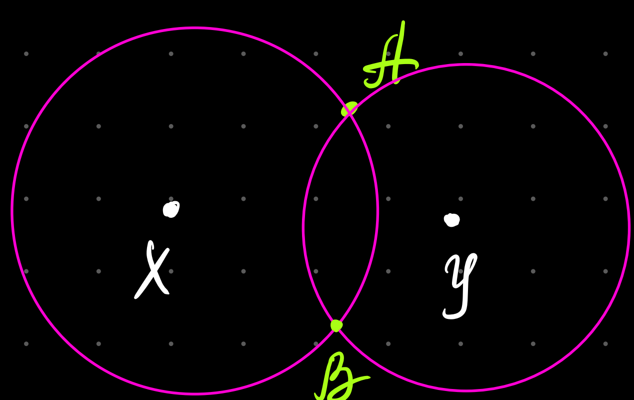
Тогда очевидно

$$\rho(P,X)=\rho(f(P),f(X))=\rho(P,X')$$

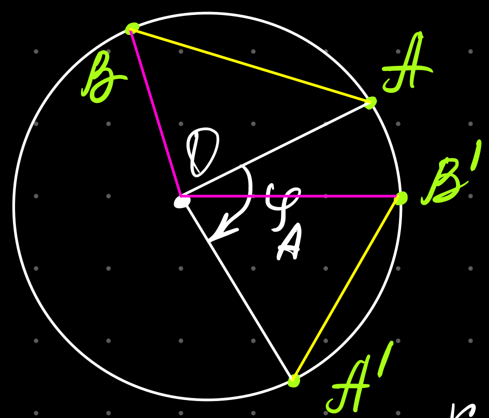
3) Какие могут быть движения, имеющие 2 неподвижные точки?



Если $\exists\, A,B: f(A)=B$, $A\neq B$, то получаем симметрию относительно оси XY, поскольку $\forall A: \rho(A,X)=$
$=\rho(f(A),X)$
и $\rho(B,Y)=\rho(f(B),Y)$



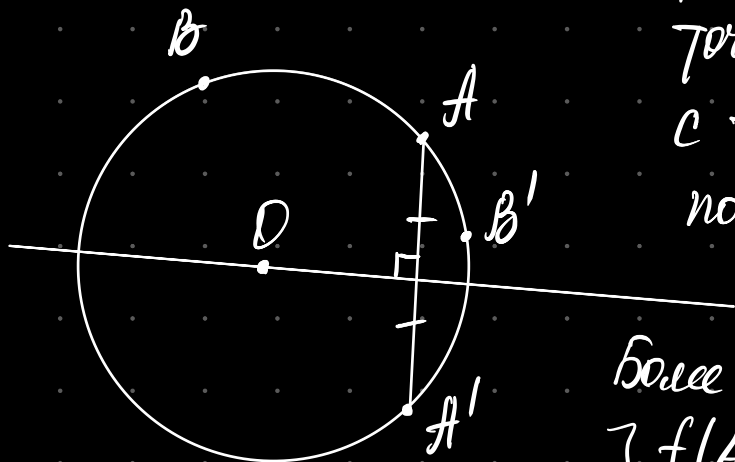
4) $\exists$ имеется ≥ 1 неподвижная точка.



Если есть ещё одна неподвижная точка — смотрите предыдущий пункт.

Серединной перпендикуляры к отрезкам AA' и BB' должны пересечься только в точке X.

Это возможно только в том случае, если точки лежат в таком порядке: B, A, B', A', т.е.



точка B' должна лежать с точкой A' в разных полуплоскостях

Более элегантно:

$\exists\, f(A) = A',\ A \neq A'$

$\exists\, S$ – это симметрия отнс. серединного перпендикуляра. Тогда $S \circ f$ имеет две неподвижные точки: O и $A \Rightarrow$ либо $S \circ f = id$, либо $S\circ f = S_{OA}$. В первом случае мы получаем симметрию относит. серед. перп. А во втором — $f = S^{-1}\circ S_{OA}$ — композиция двух симметрий относительно пересекающихся осей => это поворот.

Доказательство теоремы Шаля:

] A — любая точка, $f(A) = A' \neq A$.

Рассм.-м $S\circ f$ — оно имеет неподв. точку A.

=> это либо поворот, либо симметрия.

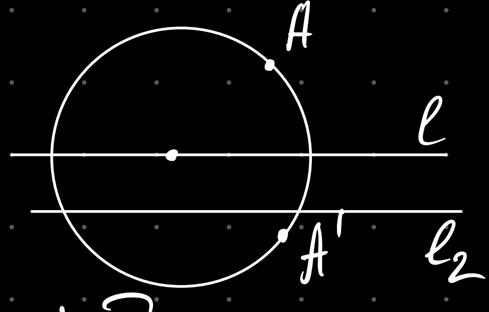
=> f — либо композ. двух симм. $=$ [поворот / парал. перенос

— либо композ. поворота и симметрии:

сдвиг

$$S_l\circ R = \underbrace{S_{l_1}\circ [S_{l_2}}_{\text{поворот}}\circ \underbrace{S_{l_3}]}_{\text{симм.}} = S_{l_1}\circ T$$

— скользящая симметрия

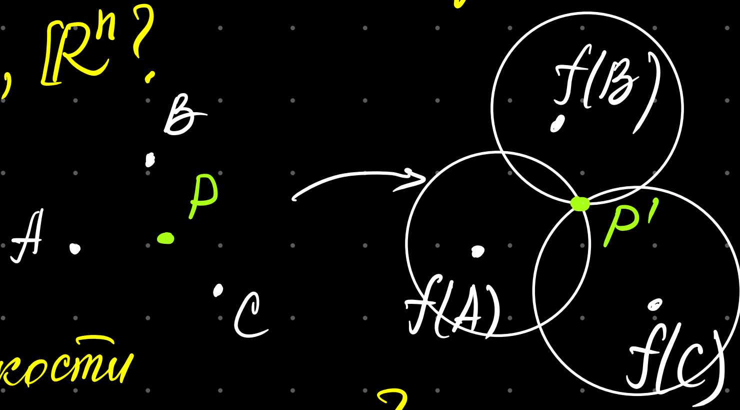


Возьмём одну из осей для построения поворота $l_2 \parallel l$, а l_1 будет тогда такой, какой нужно.

5) Теорема Минковского о порождении $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)$ отражениями.

Упр. Isom($\mathbb{R}^2$) — это группа.

Упр. Образами скольких точек можно задать изометрию $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}^n$?



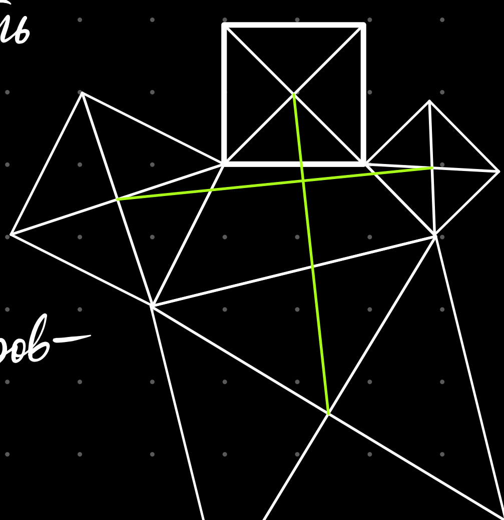
Упр. Центральная симметрия на плоскости и в пространстве. Где сохр. ориентация? Что это на плоскости?

$(x_1,\dots,x_n) \mapsto (-x_1,\dots,-x_n)$.
композиция отражений относительно 3 коорд. гиперплоскостей.

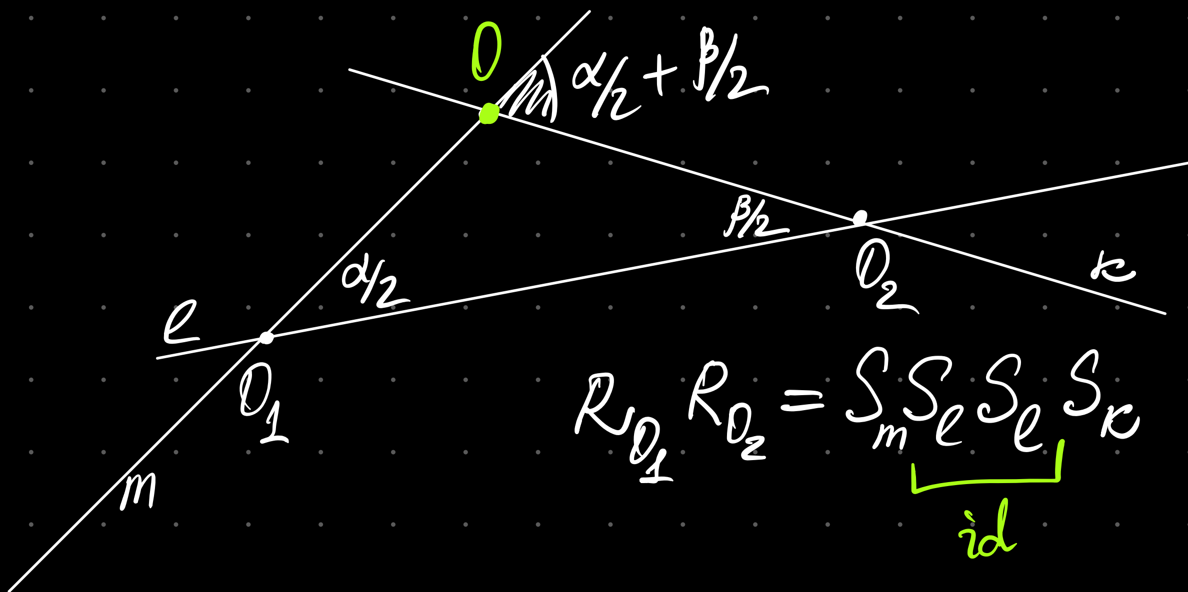
Упр. Какое движение является композицией двух центральных симметрий в $\mathbb{R}^3$?

Что будет композицией двух...

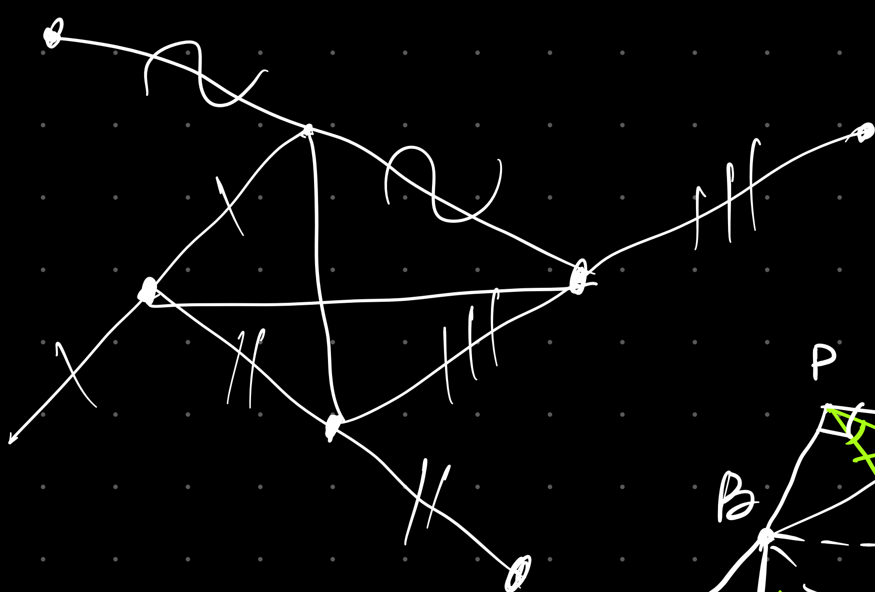
Нетривиальность того факта, что композ. двух поворотов отн. разных центров — это поворот.

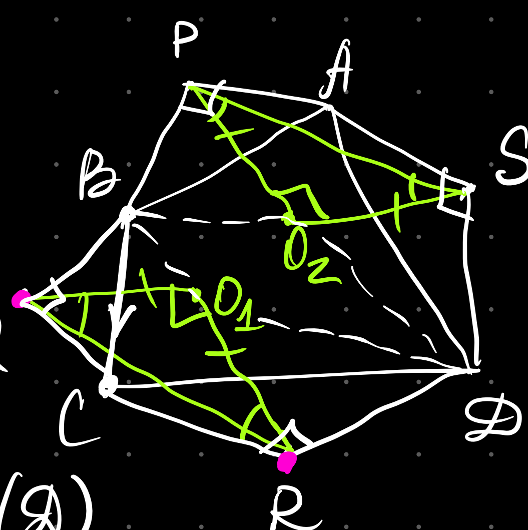


Прасолов, задачи 18.9 (с. 374)



$$R_{O_1} R_{O_2} = S_m \underbrace{S_l S_l}_{id} S_k$$





$$D = R_R^{-\frac{\pi}{2}} \circ R_Q^{-\frac{\pi}{2}}(B) = R_{O_1}^{-\pi}(B)$$

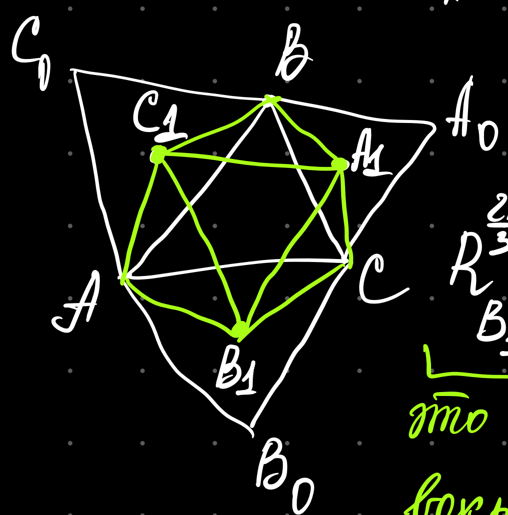
$$B = R_P^{-\frac{\pi}{2}} \circ R_S^{-\frac{\pi}{2}}(D) = R_{O_2}^{-\pi}(D)$$

$\Longrightarrow$ O_1 и O_2 совпадают и явл. серединой BD.

Но тогда ΔOPR получается из ΔOQS поворотом на $\frac{\pi}{2}$.

Теорема Наполеона

„+" здесь — по ч.с.



$$\underbrace{R_{B_1}^{\frac{2\pi}{3}} R_{C_1}^{\frac{2\pi}{3}}}(B) = C$$

это поворот на $\frac{2\pi}{3}$ вокруг некоторой точки A^*, причём $\Delta C_1B_1A^*$ — равносторонний.

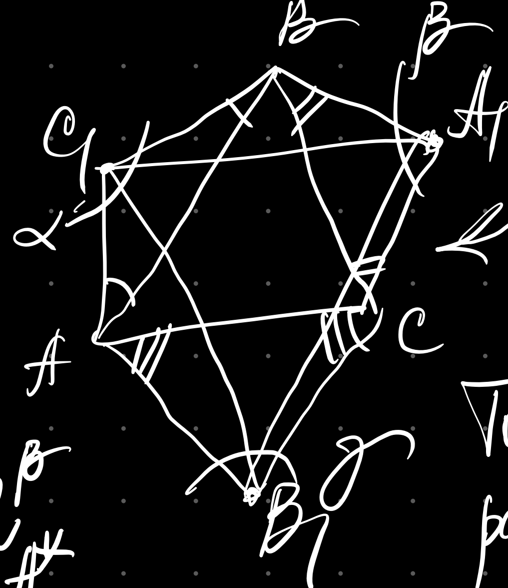
Значит, A^* — как раз центр оставшегося равн.-го треугольника.

Она должна будет лежать вне ΔABC, ибо иначе при повороте $B \mapsto C$, а нам нужно $C \mapsto B$.

Аналогичное верное, если крутить в другую сторону.

Разность площадей этих правильных треугольников равна площади исходного треугольника.

Более общее утв.



Задача 18.46

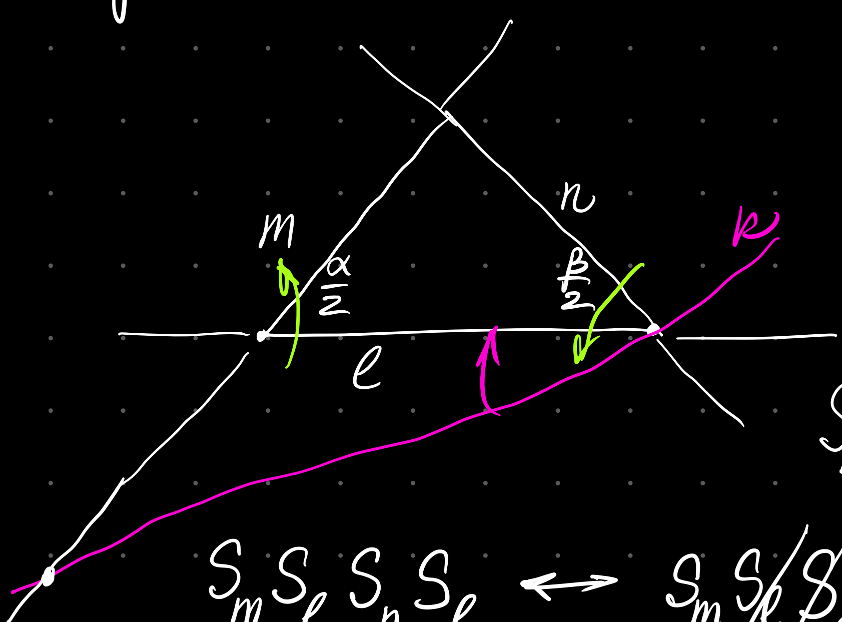
равнобедр.

$\alpha+\beta+\gamma=2\pi$

Тогда углы $\Delta A'B'C'$ равны $\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2}, \frac{\gamma}{2}$.

$$R_{B_1}^{\gamma} R_{C_1}^{\alpha} = R_{A_1}^{\beta}$$

Ну и всё.



$$S_m \cancel{S_l} \cancel{S_l} S_n = S_m S_n$$

$$S_m S_l S_n S_l \longleftrightarrow S_m \cancel{S_l} \cancel{S_l} S_k = S_m S_k$$

К разбору домашнего задания:

В задаче про купюры:

$$(1+x^{k_1})(1+x^{k_2})\dots(1+x^{k_m})$$

Коэффициент при x^n будет давать число способов представить n в виде суммы k_i.

К задаче Эйлера.

Нужно взять бесконечное произведение

$$\underbrace{(1+x+x^2+\dots)}_{\#\text{"1"}}\underbrace{(1+x^2+x^4+x^6+\dots)}_{\#\text{"2"}}\underbrace{(1+x^3+x^6+\dots)}_{\text{"3"}}\dots$$

$$k_1\cdot 1+k_2\cdot 2+k_3\cdot 3+\dots=n$$

решений данного уравнения в целых неотр.-х числах по модулю действия симметрической группы S_n

---

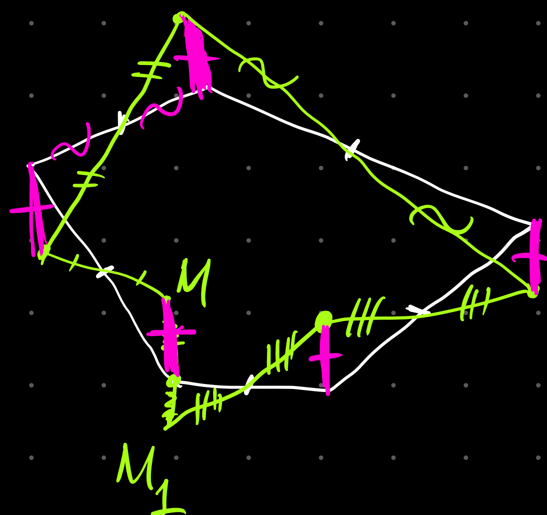
$a_1 \dots a_n$ Выделим „внешние скобки" = „скобки 1-го уровня".

$$\underbrace{(\quad)(\quad)}\rightsquigarrow((a_1a_2)a_3)\dots$$

расставим всё в прямом порядке

Затем возьмём следующую скобку и объединим с предыдущей.

$$(ab)(cd) = ((ab)c)d$$



$$\pi \cdot (2n+1)$$