Теорема (Менелай). *Прямая пресекает стороны AB, BC и продолжение стороны AC за точку C треугольника ABC в точках A_1, B_1, C_1 соответственно. Тогда* $\frac{AA_1}{A_1B} \cdot \frac{BB_1}{B_1C} \cdot \frac{CC_1}{C_1A} = 1$.

На рис. 1 стрелочками показано, как нужно двигаться по сторонам треугольника, чтобы записать выражение в левой части.

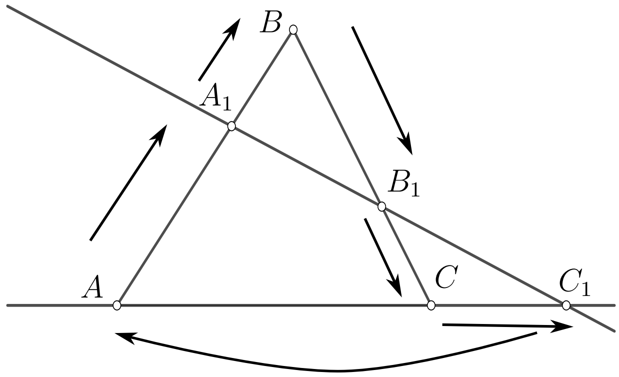

Рис. 1

Доказательство. Проведём через точку C прямую ℓ, параллельную прямой A_1B_1, и пусть она пересекает сторону AB в точке K (см. рис. 2). Заметим, что треугольники BA_1B_1 и BKC подобны по двум углам, откуда $\frac{BB_1}{B_1C} = \frac{BA_1}{A_1K}$.

Аналогично, по двум углам подобны треугольники AKC и AA_1C_1, и поэтому $\frac{AC}{CC_1} = \frac{AK}{KA_1}$.

Теперь найдём значение выражения в левой части:

$$\frac{AA_1}{A_1B} \cdot \frac{BB_1}{B_1C} \cdot \frac{CC_1}{C_1A} = \frac{AA_1}{A_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1K} \cdot \frac{1}{\frac{AK}{KA_1} + 1} =$$

$$= \frac{AA_1}{A_1B} \cdot \frac{BA_1}{AK + KA_1} = 1.$$

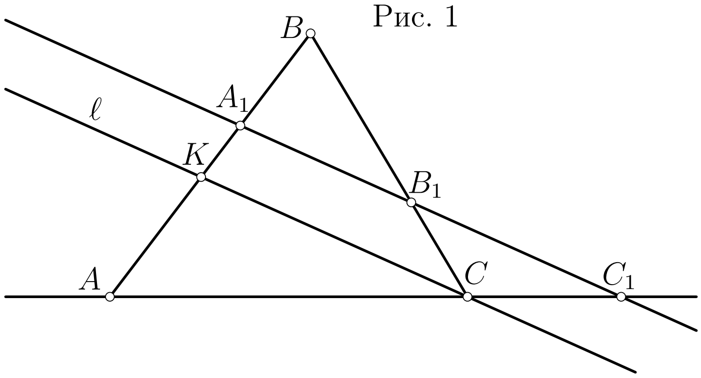

Рис. 2

Что и требовалось. □

Верно также и обращение данной теоремы:

Теорема (обратная к теореме Менелая). *Возьмём на сторонах AB, BC и продолжении за точку C стороны AC соответственно точки A_1, B_1, C_1. Если выполнено* $\frac{AA_1}{A_1B} \cdot \frac{BB_1}{B_1C} \cdot \frac{CC_1}{C_1A} = 1$, *то точки A_1, B_1, C_1 лежат на одной прямой.*

Задача 1. Докажите это.

Задача 2. При помощи теоремы Менелая убедитесь в том, что точка пересечения медиан делит каждую из них в отношении $2 : 1$, считая от вершины.

Задача 3. В треугольнике взяли по точке на двух сторонах и провели два отрезка, каждый из которых соединяет отмеченную точку и противоположную вершину треугольника. В результате, треугольник разбился на три треугольника и один четырёхугольник. Найдите площадь четырёхугольника, если площади треугольников равны $1, 2$ и 3.

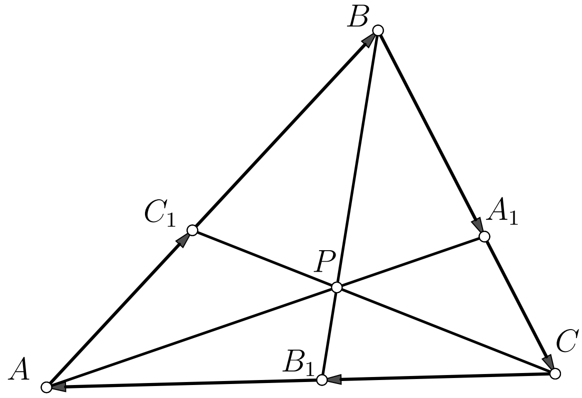

Рис. 3: к теореме Чевы

Теорема (Чева). На сторонах BC, AC, AB треугольника ABC отметили точки A_1, B_1, C_1. Отрезки AA_1, BB_1CC_1 пересекаются в одной точке $\Leftrightarrow \frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1$.

Задача 4. Докажите это. (*Указание: воспользуйтесь несколько раз теоремой Менелая*).

Задача 5. Докажите, что отрезки, соединяющие вершины треугольника и точки касания вписанной окружности с противоположными сторонами, пересекаются в одной точке, называемой *точкой Жергонна*.

Задача 6. В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C на гипотенузе отметили точку P так, что $AC = BP$. Докажите, что в треугольнике ACP биссектриса угла P, высота из вершины P и медиана из вершины C пересекаются в одной точке.