Немного о инверсии и геометрии Лобачевского

1. Существует ли на плоскости Лобачевского треугольник (*с попарно несовпадающими вершинами*) с нулевой суммой углов?

2. Докажите, что для любой точки P и любой прямой ℓ на плоскости Лобачевского существует прямая m, проходящая через точку P перпендикулярно ℓ. Докажите, что она единственна (как и в евклидовом случае).

3. Докажите, что на обычной евклидовой плоскости композиция двух отражений относительно прямых — это поворот. На какой угол происходит этот поворот?

Определения. а) *Поворотом* вокруг точки P на плоскости Лобачевского называется композиция любых двух отражений от прямых, проходящих через точку P.
б) Если O и A — различные точки на плоскости Лобачевского, то *гиперболическая окружность* с центром O и радиусом OA есть множество образов точки A при всех поворотах вокруг O.

4. Докажите, что гиперболическая окружность в модели Пуанкаре на круге является евклидовой окружностью, и обратно, любая евклидова окружность на плоскости Лобачевского является гиперболической окружностью. (*Обратите внимание на то, что центры евклидовой и неевклидовой окружностей вообще говоря не совпадают!*).

5. Определим функции

$$\operatorname{ch} x := \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$
$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2},$$
$$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x},$$

называемые соответственно *гиперболическим косинусом, синусом и тангенсом.* Докажите, что

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1,$$
$$\operatorname{ch}(x+y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y,$$
$$\operatorname{sh}(x+y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} y \operatorname{ch} x,$$
$$\operatorname{th}(x+y) = \frac{\operatorname{th} x + \operatorname{th} y}{1 + \operatorname{th} x \operatorname{th} y}.$$

6. (*Задача на обычную евклидову планиметрию*). Впишем в сегмент круга Ω, ограниченный хордой AB, окружности ω_i так, чтобы каждая из них касалась двух соседних, хорды и окружности Ω. Найдите ГМТ центров ω_i. (*ГМТ — геометрческое место точек*).

7. (*Задача на обычную евклидову планиметрию*). В четырёхугольник $ABCD$ вписана окружность ω с центром в точке O, касающаяся сторон BC, CD, AD в точках E, F и K соответственно. Прямые EF и AD пересеклись в точке M. Докажите, что прямые CK и OM перпендикулярны.

Указание. Посмотрите, куда перейдёт прямая CK при инверсии относительно окружности ω.