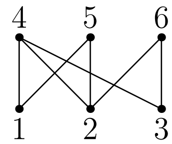
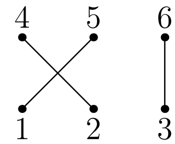
1 Немного о совершенных паросочетаниях

Пусть имеется *двудольный граф* $G = G(V_1, V_2)$ — это такой граф, у которого имеется два множества вершин V_1 и V_2 — доли — такие, что любое ребро G имеет один конец в первом множестве, а другой конец — во втором.



Двудольный граф



Паросочетание

Задача 1. Докажите, что граф является двудольным $\Leftrightarrow$ в нём нет циклов нечётной длины.

Для двудольных графов можно рассмотреть так называемое *паросочетание* — это множество попарно несмежных рёбер. Паросочетание называется *совершенным*, если оно покрывает все вершины первой доли V_1.

Лемма 1 (Филипп Холл)**.** *Есть n юношей и несколько девушек. Любые k юношей (k пробегает множество от 1 до n) знакомы в совокупности не менее, чем с k девушками. Тогда каждый юноша может выбрать себе невесту.*

Задача 2. Друзья собрались на дне рождения. Они пришли не с пустыми руками: каждый принёс торт массой не меньше килограмма. Все торты были разрезаны и *все* до кусочка разложены по тарелкам. Гости оказались скромными и поэтому просили больше килограмма им в тарелку не класть. Докажите, что можно так раздать тарелки гостям, что у каждого будет кусочек того торта, что он принёс (именинник сидит на диете).

Задача 3. В старой шахматной доске мыши прогрызли k клеток. При каком наибольшем k на доску можно поставить 8 не бьющих друг друга ладей?

Задача 4 (Анри Пуанкаре)**.** В любом регулярном двудольном графе существует совершенное паросочетание. (Граф называется *регулярным*, если степени всех его вершин равны).

Задача 5. *Латинским прямоугольником* называется таблица $m \times n$ ($m \leqslant n$), строки которой заполнены различными числами от 1 до n так, что в каждом столбце все числа различны. Докажите, что любой латинский прямоугольник может быть дополнен до латинского квадрата.

2 Матрица смежности графа

Каждому графу с n вершинами можно поставить в соответствие двоичную $n \times n$–матрицу *смежности.* На пересечении i–ой строки и j–ого столбца ($i \neq j$) стоит 1, если вершины под номерами i и j смежны, и 0 — во всех остальных случаях.

Так, например, выглядит матрица смежности графа из предыдущего пункта:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Задача 6. Пусть A — матрица смежности графа. Докажите, что (i, j)–ый элемент матрицы A^r являет собой число путей на r рёбрах (возможно, самопересекающихся), соединяющих i–ую и j–ую вершины графа.

Задача 7. Пусть A — матрица смежности графа. Что собой представляет число $\mathrm{tr}A^2$, где $\mathrm{tr}(\cdot)$ — это *след* матрицы, т. е. сумма её диагональных элементов?

Задача 8. Как по матрице смежности графа найти число треугольных циклов без построения графа?