Геометрия чисел

Малый мехмат

25.09.2020

Догадка К. Ф. Гаусса

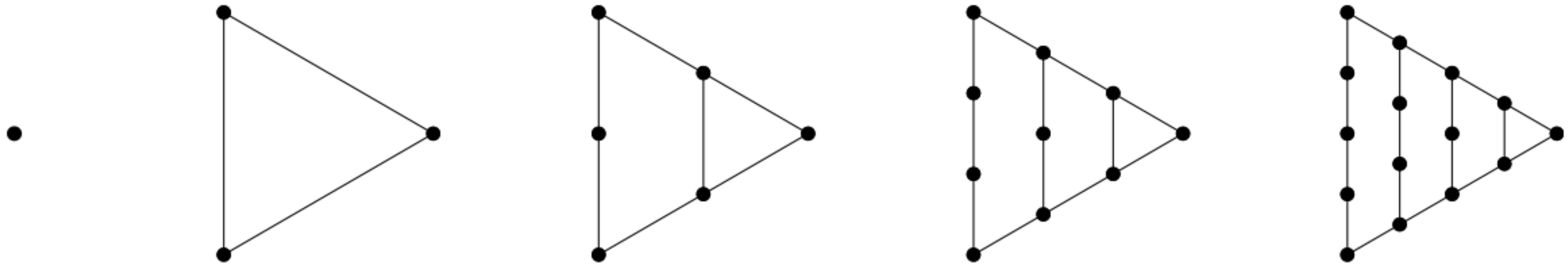
- **Задача.** Чему равна сумма $1 + 2 + \ldots + 100$?
- $$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \\ 100 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 100 \\ 99 \\ 98 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 101 \\ 101 \\ 101 \\ \vdots \\ 101 \end{pmatrix}$$

Арифметическая прогрессия

- $\sum_{j=1}^{n} \big(a + d(j-1)\big) = a + (a+d) + (a+2d) + \ldots + (a + d(n-1)) = \ldots$

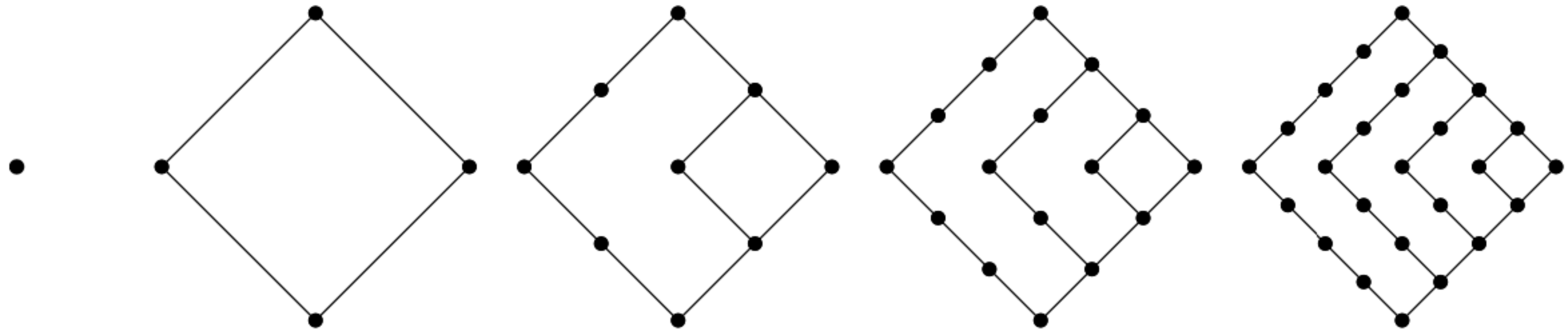
Треугольные числа

- $S_3(n) = 1 + 2 + 3 + \ldots + n$



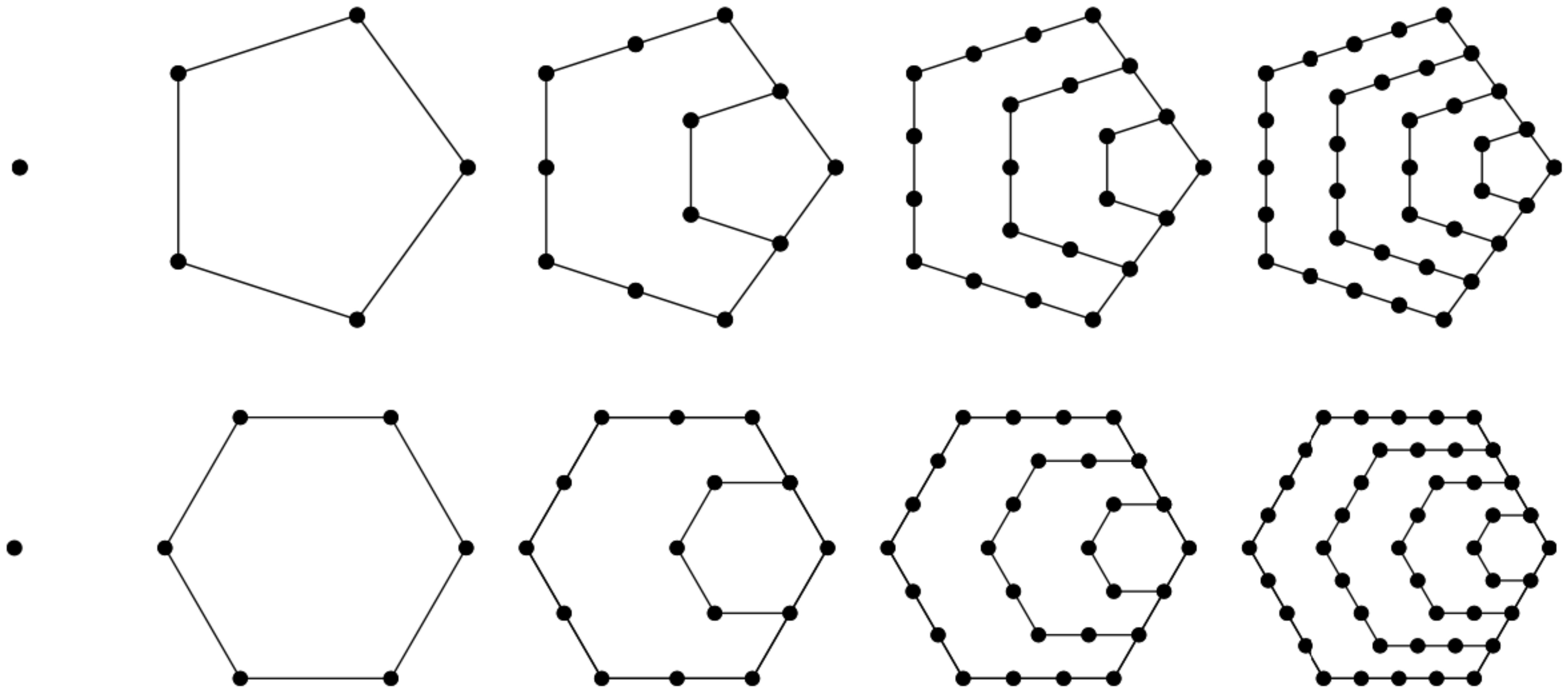
4-ые числа

- Вопрос. Чему равно n-ое 4-ое число $S_4(n)$?



m-угольные числа

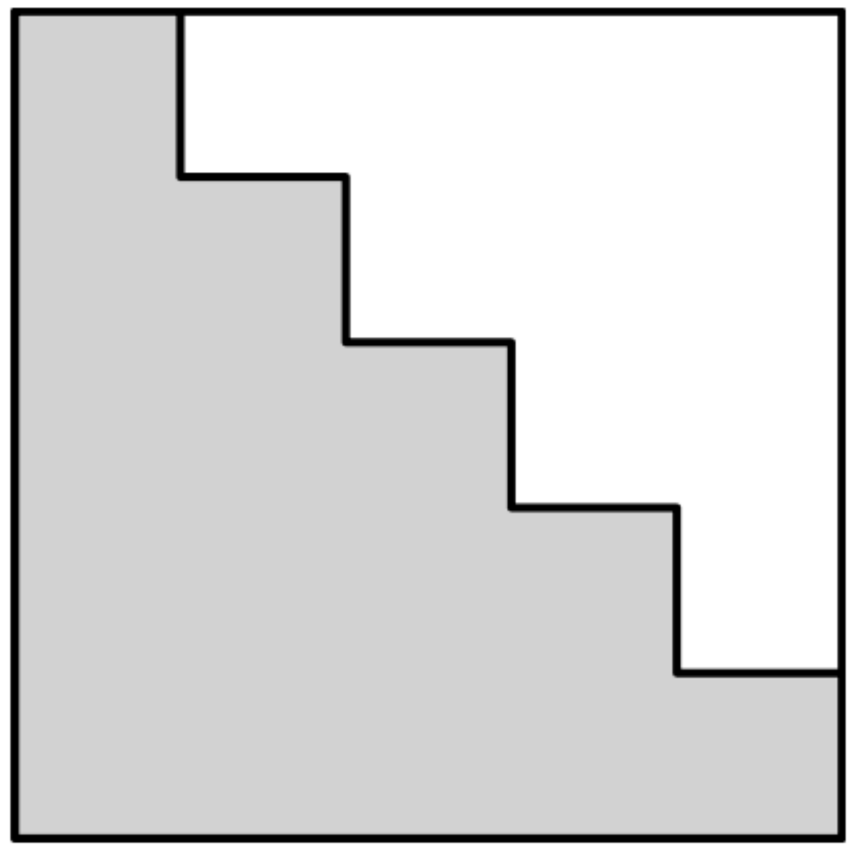
- **ДЗ.** Найдите формулу для n-го m-угольного числа $S_m(n)$

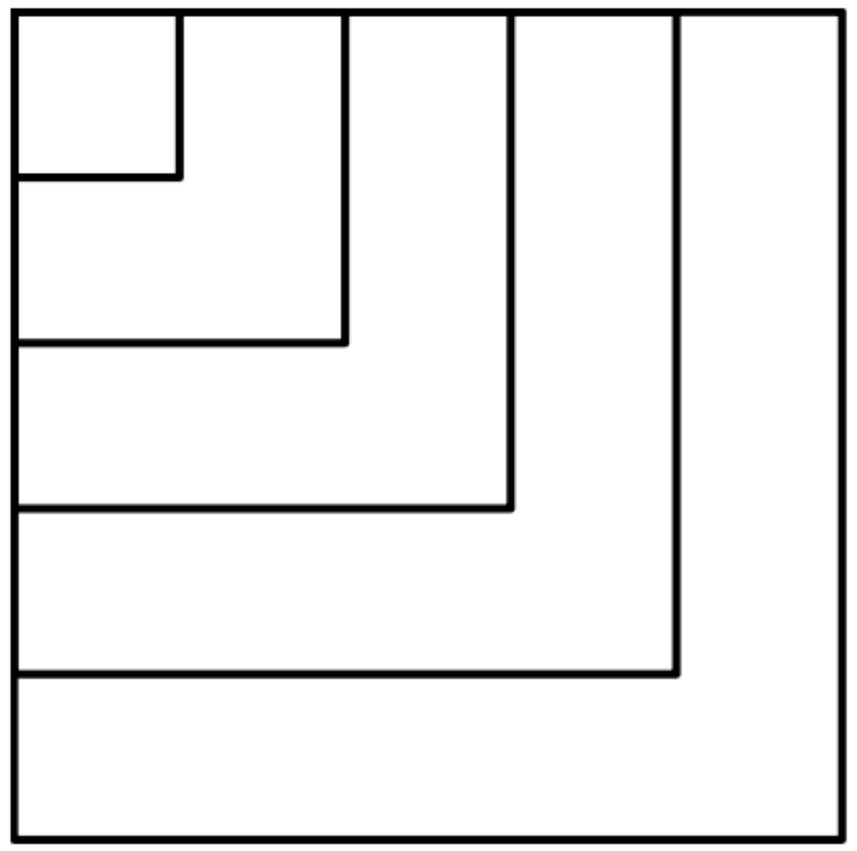


М. Деза
«Фигурные числа»

Геометрические соображения

- Сумму $1 + \ldots + n$ можно найти, нарисовав квадратик:
- **Вопрос.** Какой квадратик можно нарисовать для нахождения суммы нечётных чисел от 1 до $2n - 1$?



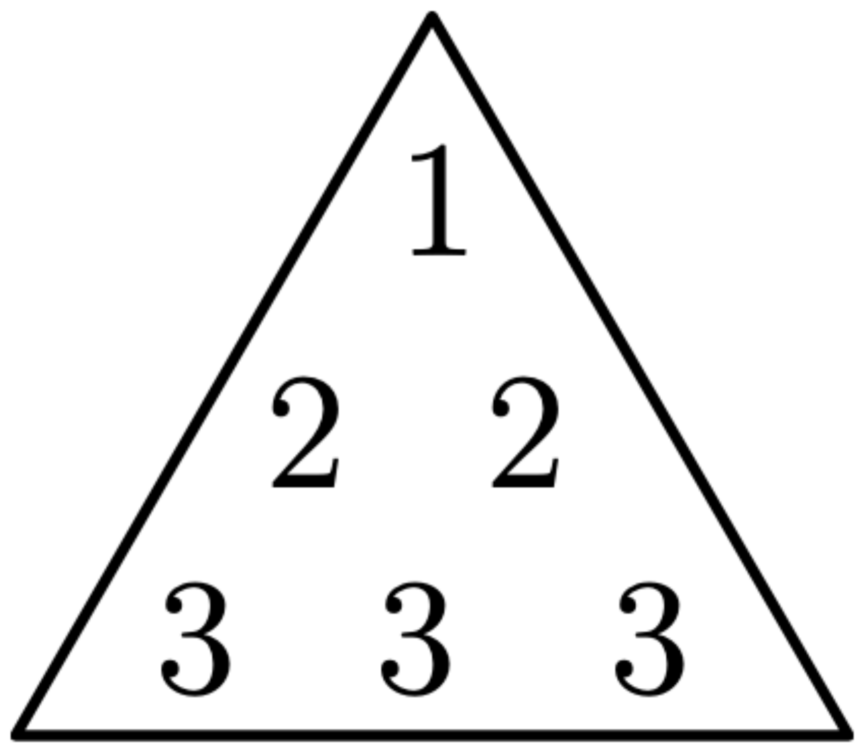


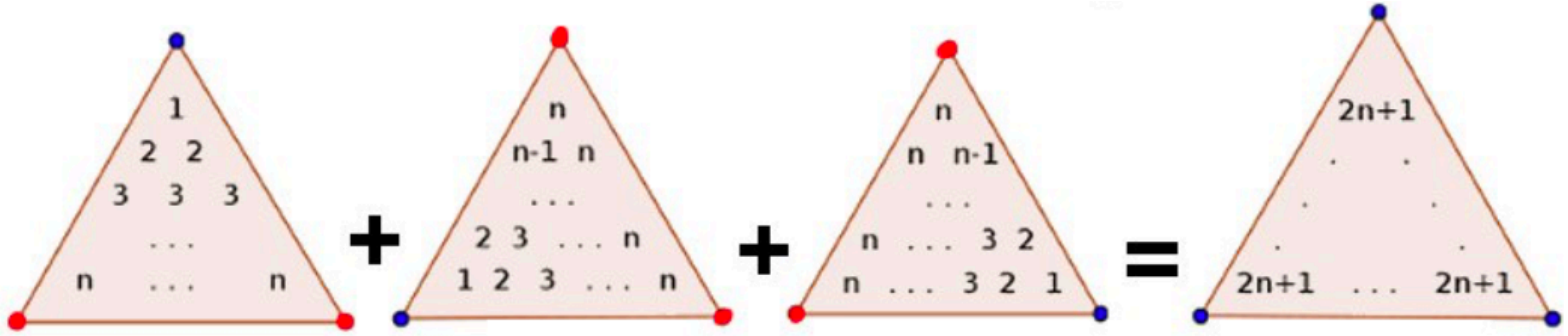
Достижение Архимеда

- Чему равна сумма $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2$?
- Что значит, чему равна?! В каком смысле? Этому и

равна, что написано!

- Хорошо, а что будет при $n = 1\ 000$ (без компьютера)?
- **Задача.** Получите геометрически данную сумму (способом, похожим на способ Гаусса)





Идём дальше!

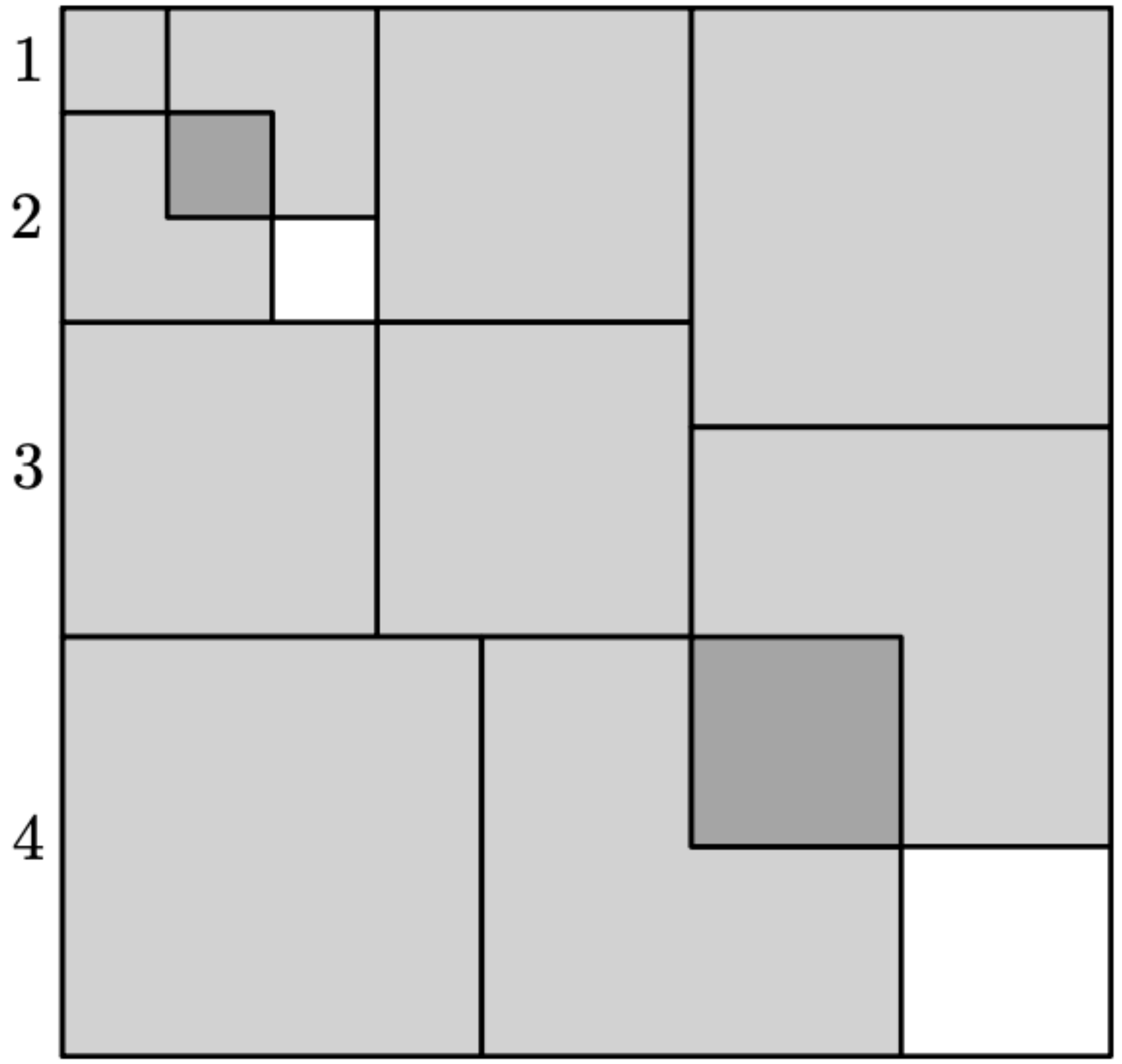
- А что с суммой кубов $1^3 + \ldots + n^3$?
- **Применяем метод научного тыка!**
- Мы знаем, что
- $1^0 + 2^0 + \ldots + n^0 = n$
- $1 + \ldots + n = n(n+1)/2$
- $1^2 + \ldots + n^2 = n(n+1)(2n+1)/6$
- **Вопрос.** Какие у нас есть гипотезы?

Метод научного тыка

- **Гипотеза:** $1^k + \ldots + n^k = P_{k+1}(n)$**, где** $P_{k+1}(n)$ **– многочлен от** n **степени** $k+1$
- Ну тогда таки попробуем для $n = 3$!
- Пусть $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = an^4 + bn^3 + cn^2 + dn + e$
- Осталось найти неизвестные коэффициенты a, b, c, d, e. Что нужно для этого проделать?
- Нужно решить толстую систему уравнений 5×5 с 5-ю неизвестными!
- Это тяжко! Но на компьютере можно реализовать за $O(n^3)$ в самом плохом случае

Возвращаясь к геометрии...

- Заметим, что $1^3 + \ldots + n^3 = (1 + \ldots + n)^2$



Почему верна гипотеза?

- Для начала докажем её для случая $k = 3$
- **Гениальная идея:**

$$a_n - a_0 = (a_n - a_{n-1}) + (a_{n-1} - a_{n-2}) + \ldots + (a_1 - a_0) = \sum_{i=1}^{n} (a_i - a_{i-1})$$

- **Задача.** Как довести эту мысль до конца?
- **Hint:** $n^3 - (n-1)^3$
- $n^3 - 1 = \left(n^3 - (n-1)^3\right) + \left((n-1)^3 - (n-2)^3\right) + \ldots + (2^3 - 1^3) = \ldots$
- Суммируем и используем предыдущие знания!

$$
\begin{aligned}
1^3 - 0^3 &= 3 \cdot 1^2 - 3 \cdot 1 + 1 \\
2^3 - 1^3 &= 3 \cdot 2^2 - 3 \cdot 2 + 1 \\
3^3 - 2^3 &= 3 \cdot 3^2 - 3 \cdot 3 + 1 \\
\cdots \\
n^3 - (n-1)^3 &= 3 \cdot n^2 - 3 \cdot n + 1
\end{aligned}
$$

Почему верна гипотеза?

- Теперь не составляет большого труда доказать и саму гипотезу о том, что сумма $S_k(n) = 1^k + \ldots + n^k$ – это многочлен от переменной n степени $k+1$
- **Задача.** Докажите гипотезу со свистом!

Числа Я. Бернулли B_k

- Ещё разок выпишем полученные результаты:
- $S_0(n) = n$
- $S_1(n) = \dfrac{n^2}{2} + \dfrac{n}{2}$
- $S_2(n) = \dfrac{n^3}{3} + \dfrac{n^2}{2} + \dfrac{n}{6}$
- $S_3(n) = \dfrac{n^4}{4} + \dfrac{n^3}{3} + \dfrac{n^2}{4}$
- $B_0 = 1,\ B_1 = \dfrac{1}{2},\ B_2 = \dfrac{1}{6},\ B_3 = 0,\ \ldots$

Числа Бернулли B_k

- **Определение.** B_k – это коэффициент при 1-й степени в многочлене $S_k(n)$
- **Задача.** Все числа Бернулли с нечётными номерами, кроме первого, равны 0, т. е. $B_{2m-1} = 0,\ m > 1$
- **Hint:** рассмотрите разность $(1+a)^{2m} - (1-a)^{2m} = 2\left(C_{2m}^1 a + C_{2m}^3 a^3 + C_{2m}^5 a^5 + \ldots + C_{2m}^{2m-1} a^{2m-1}\right)$
- Просуммируем по $a = 1, \ldots, n$:
  Левая часть: $\left(-1 + S_{2m}(n) + (n+1)^{2m}\right) - \left(S_{2m}(n) - n^{2m}\right) = (n+1)^{2m} + n^{2m} - 1$
- Правая часть: $2\left(C_{2m}^1 S_1(n) + C_{2m}^3 S_3(n) + C_{2m}^5 S_5(n) + \ldots + C_{2m}^{2m-1} S_{2m-1}(n)\right)$
- $C_{2m}^1 B_1 + C_{2m}^3 B_3 + C_{2m}^5 B_5 + \ldots + C_{2m}^{2m-1} B_{2m-1} = m$
- $C_{2m}^3 B_3 + C_{2m}^5 B_5 + \ldots + C_{2m}^{2m-1} B_{2m-1} = 0\ \forall m \geqslant 1$

- (a+b)^n=...
- (a+b)^2=a^2+2ab+b^2
- $(a+b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \ldots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + b^n$
- $(a+b)(a+b)(a+b)\ldots(a+b)(a+b)(a+b)$
- $C_n^k a^k b^{n-k}$

- $\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$

$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$

Числа Бернулли B_k

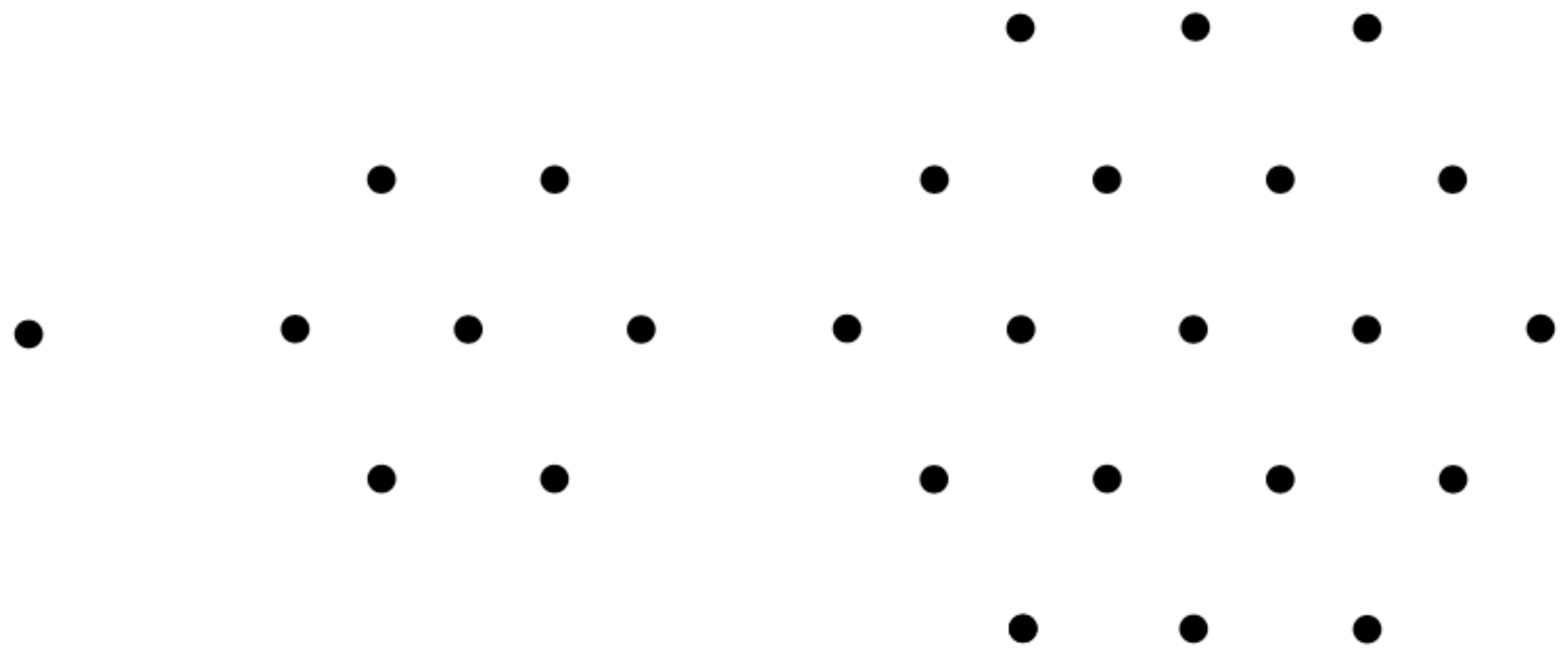
- Беря последовательные значения m, мы получим наше утверждение $\square$
- **ДЗ.** Получите рекуррентную формулу для чисел Бернулли:

$$B_k = \frac{1}{k+1}\left(C_{k+2}^{2}B_{k-1} - C_{k+1}^{3}B_{k-2} + \ldots + (-1)^k C_{k+1}^{k}B_1 + (-1)^{k+1}B_0\right)$$

- Через числа Бернулли выражаются многие разложения в ряды:
- $\operatorname{tg} x = \sum_{k=1}^{\infty} \widetilde{B_{2k}} \frac{2^{2k}(2^{2k}-1)}{(2k)!} x^{2k-1}, |x| < \frac{\pi}{2}$
- $\frac{x}{e^x - 1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} x^k, |x| < 2\pi$ – важно для топологии!
- При больших n $|B_n| \sim \frac{n!}{(2\pi)^n}$

Гексы

- Сколько точек на n-ом гексе? Сколько всего точек на гексах?



1) 2) 3)

Гексы

- Всего точек n^3, а на n-ом гексе: $n^3 - (n-1)^3$