Три теоремы о выпуклых оболочках

Малый мехмат

24.10.2020, Михаил Корнев

Индукция

Разминка

- **Задача.** Докажите, что для любого $n \geqslant 3$ единицу можно представить в виде суммы n попарно различных дробей вида $\dfrac{1}{k}$, где $k \in \mathbb{N}$

Разминка

- **Задача.** Физрук скомандовал стоящим в шеренгу детям: «Нале-во!». В эту секунду каждый школьник повернулся либо налев, либо направо. Каждую следующую секунду школьники, оказавшиеся лицом друг к другу, одновременно поворачивались кругом. Может ли так случиться, что дети не перестанут никогда крутиться?

Разминка

- Докажите, что последовательность

$$\sqrt{2},\ \sqrt{2+\sqrt{2}},\ \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}},\ldots$$

- Ограничена
- Возрастающая
- Каков её предел?

Разминка

- **Задача.** Докажите, что квадрат можно разрезать на любое число квадратов, начиная с 6

Векторное пространство

- **Векторное пространство** V – это множество векторов v, которые можно складывать и умножать на числа (*аксиомы выписывать не буду*)
- У нас оно будет конечномерным, т. е. $V = \{\lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_n e_n\}$ – n-мерное векторное пространство с базисом $e_1, \ldots, e_n$
- **Примеры**

Аффинное пространство

- Аффинное пространство $\mathbb{A}^n$ – это множество точек a, для которых определено смещение на векторы $v \in V$: $a_1 + v = a_2$. **Примеры**
- Разность двух точек – это вектор

Аффинное пространство

- Сумма точек имеет смысл не всегда
- Аффинная оболочка точек $a_1, \ldots, a_n$ – натягиваем на $a_1 - a_0, \ldots, a_n - a_0$ плоскость, проходящую через точку a_0
- $\lambda_1(a_1 - a_0) + \ldots + \lambda_n(a_n - a_0) = \lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_n a_n + (1 - \lambda_1 - \ldots - \lambda_n)a_0$
- Значит имеют смысл суммы точек $\{\mu_1 a_1 + \ldots + \mu_n a_n \mid \mu_1 + \ldots + \mu_n = 1\}$ – это плоскости в аффинном пространстве $\mathbb{A}^n$

Выпуклая линейная комбинация точек

- Оной для точек $x_1, \ldots, x_k$ называется сумма
- $\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_k x_k$, $\lambda_i \geqslant 0$, $\lambda_1 + \ldots + \lambda_k = 1$
- **Вопрос.** Что даст выпуклая линейная комбинация для двух точек? а для трёх? а для четырёх? а для n?

Выпуклые множества

- Множество называется **выпуклым**, если любые его две точки принадлежат этому множеству вместе сотрезком с концами в этих точках:

$$x,\ y \in X \Rightarrow \{\lambda x + (1-\lambda)y\} \subset X$$

- Пересечение выпуклых – выпукло
- **Напоминание.** Про $\mathbb{R}^n$ можно думать, как про строки, состоящие из n чисел
- Выпуклая оболочка точек $\{x_1, \ldots, x_k\}$ в $\mathbb{R}^n$ – это наименьшее по включению выпуклое подмножество в $\mathbb{R}^n$, содержащее все эти точки
- **Примеры**

Теорема Каратеодори

- **Теорема (Каратеодори).** Пусть есть множество точек $X \subset \mathbb{R}^n$. Тогда любая точка из его выпуклой оболочки $\operatorname{Conv} X$ содержится в неком симплексе, размерности не больше n
- **Примеры**

Доказательство

- Пусть $x = \mu_1 x_1 + \ldots + \mu_k x_k$, $k \geqslant n + 2$, $\mu_i \geqslant 0$, $\mu_1 + \ldots + \mu_k = 1$
- Покажем, что одно из слагаемых можно занулить $x = s_1 x_1 + \ldots + s_k x_s$, $s_1 \ldots s_k = 0$
- $k - 1 \geqslant n + 1 \Rightarrow$ что с векторами $x_2 - x_1,\ x_3 - x_1,\ \ldots,\ x_k - x_1$?
- Они зависимы, т. е. $0 = \lambda_2(x_2 - x_1) + \ldots + \lambda_k(x_k - x_1) = \lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_k x_k$
- Но $\lambda_1 + \ldots + \lambda_k = 0 \Rightarrow$ есть хотя бы одна $\lambda_i > 0$
- Вычтем нуль: $x = x - 0 = \sum \mu_i x_i - \alpha \sum \lambda_i x_i = \sum (\mu_i - \alpha\lambda_i) x_i$
- Возьмём $\alpha = \min\limits_{1 \leqslant j \leqslant k} \left\{ \dfrac{\lambda_j}{\mu_j} : \mu_j > 0 \right\}$ $\square$

Теорема Радона

- **Теорема (Радон).** Любые $n + 2$ точки в $\mathbb{R}^n$ можно разбить на два непустых непересекающихся подмножества, выпуклые оболочки которых пересекаются
- **Примеры**
- **Вопрос.** А если точек будет больше, чем $n + 2$, теорема останется верной?

Доказательство

- Идея знака
- $a_1 - a_{n+2}, \ldots, a_{n+1} - a_{n+2}$ зависимы:
- $\sum \lambda_i(a_i - a_{n+2}) = 0 \Rightarrow \sum \lambda_i a_i = 0,\ \lambda_{n+2} = -\sum \lambda_i,\ \lambda_1 + \ldots + \lambda_{n+2} = 0$
- Разобьём точки на 2 подмножества: положительные и отрицательные:
- Положительные (I_+) – это те, при которых знак лямбды положителен
- Отрицательные ($I\_$) – … отрицателен
- Пусть $\Lambda = \sum\limits_{i \in I_+} \lambda_i$. Тогда точка $x = \sum\limits_{i \in I_+} \frac{\lambda_i}{\Lambda} a_i = -\sum\limits_{i \in I_-} \frac{\lambda_i}{\Lambda} a_i$ $\square$

Теорема Хелли

- **Теорема (Хелли).** Пусть $C_1, \ldots, C_k$ – выпуклые подмножества в $\mathbb{R}^n$ и $k \geqslant n+1$. Предположим, что любые $n+1$ из них пересекаются. Тогда все C_i пересекаются
- **Примеры**

Доказательство

- Что будет при $k = n + 1$?
- Пусть $k = n + 2$. Тогда после выкидывания любого множества C_i из $C_1, \ldots, C_k$, по предположению все остальные пересекуться $\ni a_i$
- Мы получим набор точек $a_1, \ldots, a_{n+2}$. Что дальше?
- По теореме Радона есть I_1 и I_2
- Дальше – по индукции $\square$