Напомним, что число Каталана C_n можно определить одним из следующих эквивалентных спсобов:

a) C_n равно числу триангуляций выпуклого $n+2$-угольника, причём по определению $C_0 = C_1 = 1$.

b) C_n — это число путей Дика из вершины $(0,0)$ в вершину $(2n,0)$. Путём Дика называется ломаная на плоскости с вершинами в целых точках, каждое звено которой направлено либо вдоль вектора $(1,1)$, либо вдоль вектора $(1,-1)$.

c) C_n — это число правильных скобочных последовательностей, состоящей из n открывающих и n закрывающих скобок, причём так, что 1) число «(» равно числу «)»; 2) в любом подслове, начинающемся с начала число «(» не меньше числа «)».

d) Это число маршрутов шахматной ладьи, лежащих не выше диагонали доски.

e) Последовательность $\{C_n\}$ однозначно задаётся рекуррентным соотношением

$$C_n = \sum_{r=0}^{n-1} C_r C_{n-r-1},\ C_0 = C_1 = 1.$$

f)

$$C_n = \frac{1}{n+1} C_{2n}^n$$

Задачи

1. Сколькими способами можно провести n непересекающихся (даже в вершинах) диагоналей в выпуклом $2n$-угольнике?

2. Сколькими способами можно расставить числа $1, 2, ..., 2n$ в прямоугольной таблице $2 \times n$ так, чтобы они возрастали бы и по каждой строке, и по каждому столбцу?

3. Найдите соответствие между правильными скобочными структурами и расстановками скобок в произведении n букв $a_1 ... a_n$.

4. Пусть $S(x) = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x^3 + ...$ — производящая функция последовательности Каталана. Покажите, что

$$xS^2(x) = S(x) - 1,$$

т. е.

$$S(x) = \frac{1 - \sqrt{1-4x}}{2x}.$$

Разложите последнее выражение в ряд, используя обобщённый бином Ньютона, и получите ещё раз явную формулу для C_n.

Указание. Обобщённая формула бинома Ньютона α

$$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + ... + \frac{\alpha ... (\alpha-k+1)}{k!}x^k + ...$$