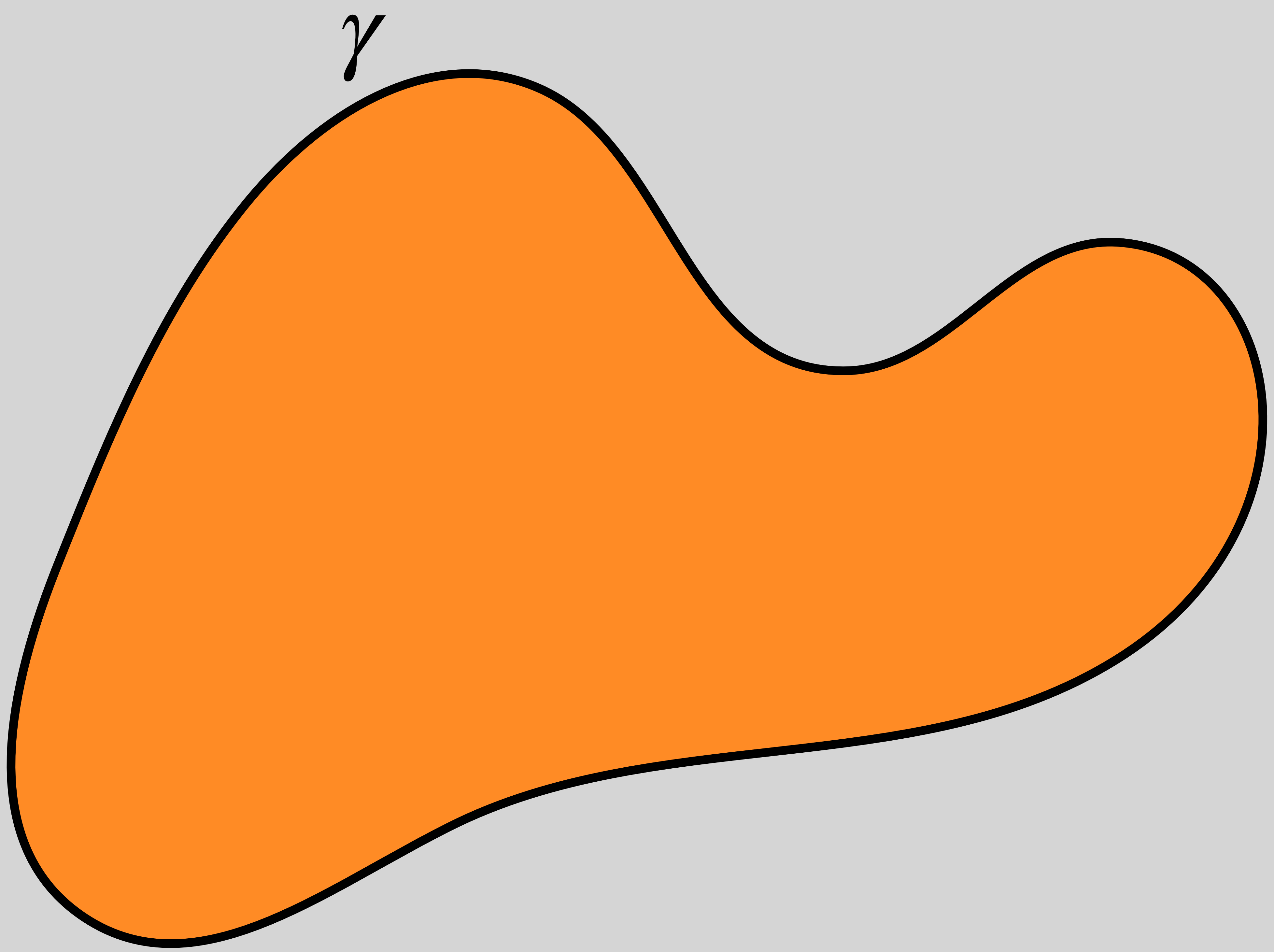
Неравенство Брунна-Минковского

Форма верёвки

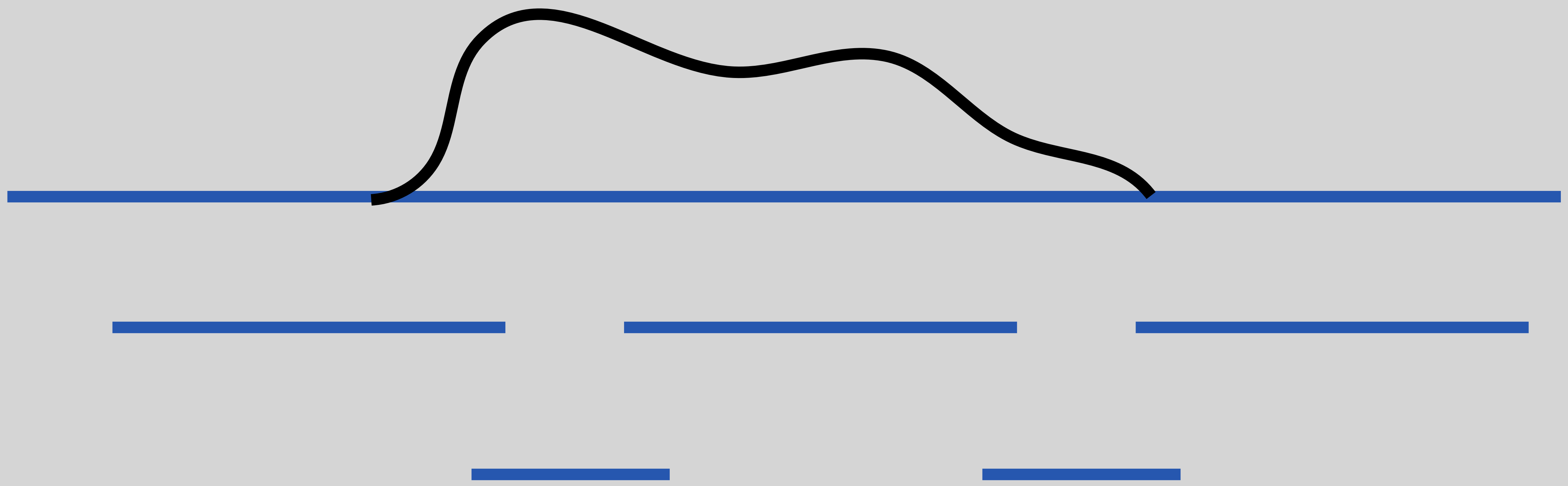
- Вариационный подход
- Неравенство Брунна-Минковского
- Метод симметризации Штейнера

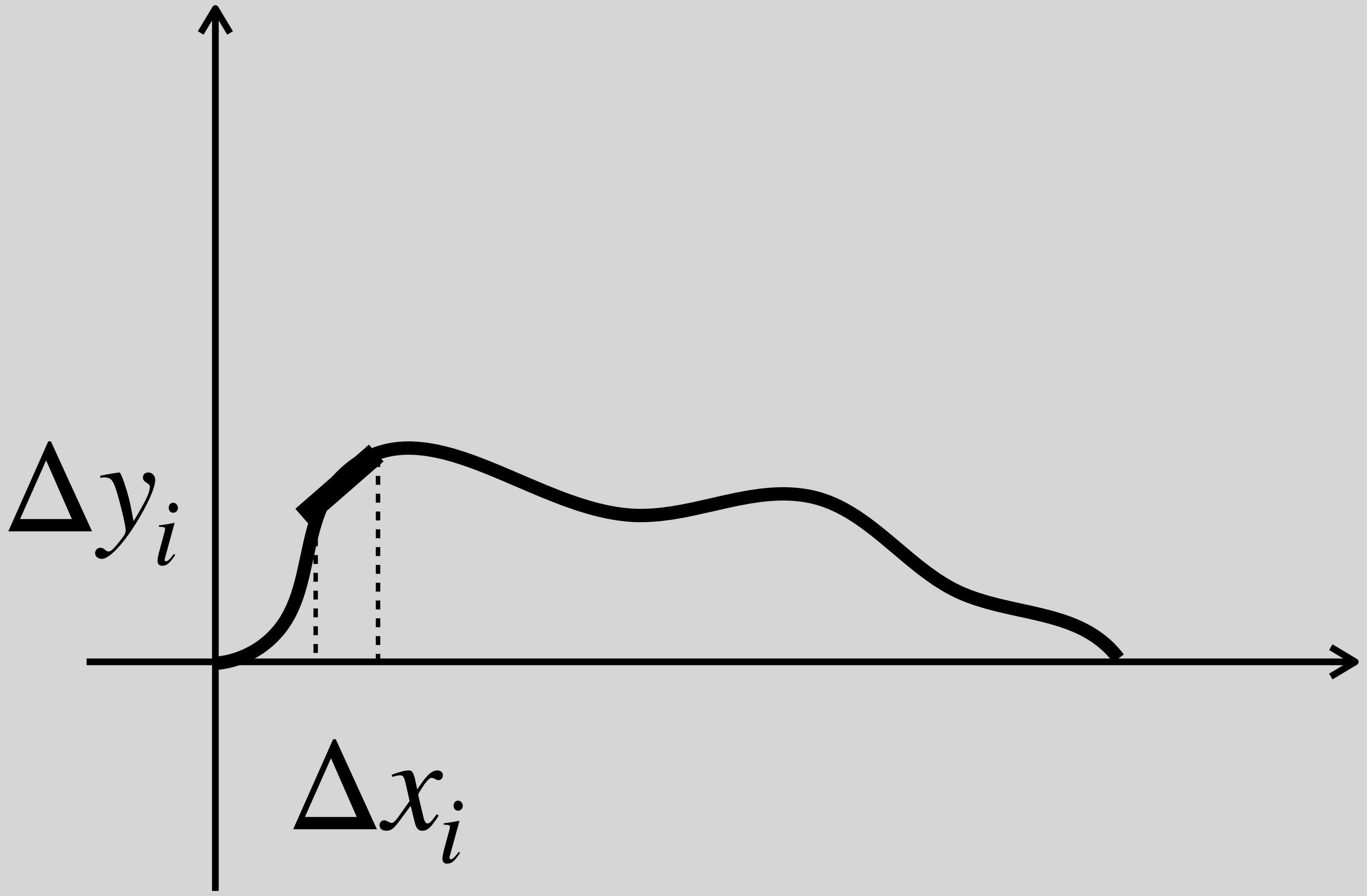


$$\boldsymbol{r}(t) = (x(t), y(t))$$

Вариационный подход

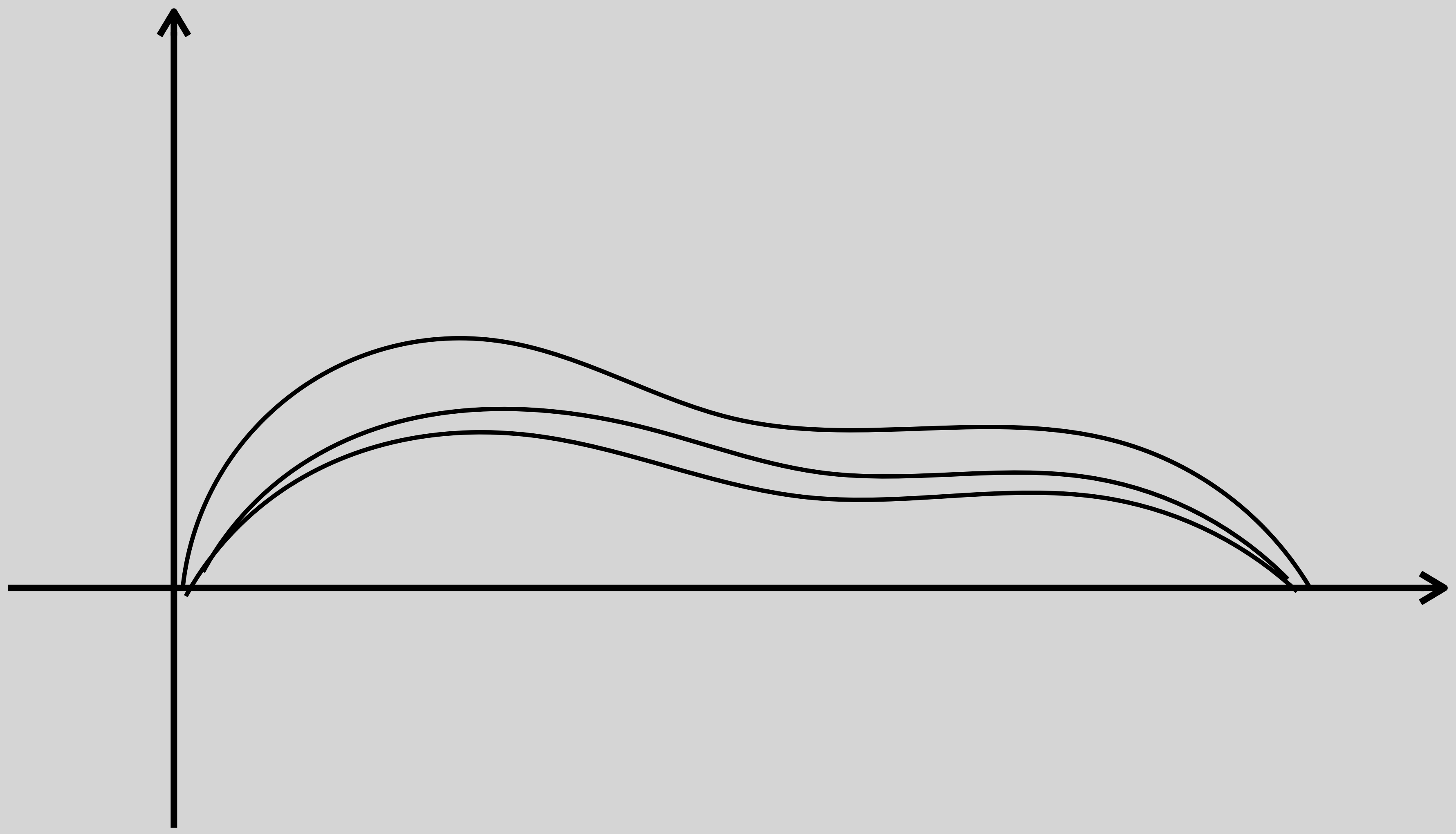
- Общая длина $L = \sum_i \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2}$
- $L = \sum_i \Delta x_i \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2}$
- $L \to \sum_i \Delta x_i \sqrt{1 + f'(x_i)^2},\ \Delta x \to 0$
- $L \to \int_0^2 \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$





Вариационный подход

- $$\begin{cases} \int_0^2 y(x)dx \to \max, \\ \int_0^2 \sqrt{1 + y'(x)^2}dx = \pi, \\ y(0) = y(2) = 0 \end{cases}$$



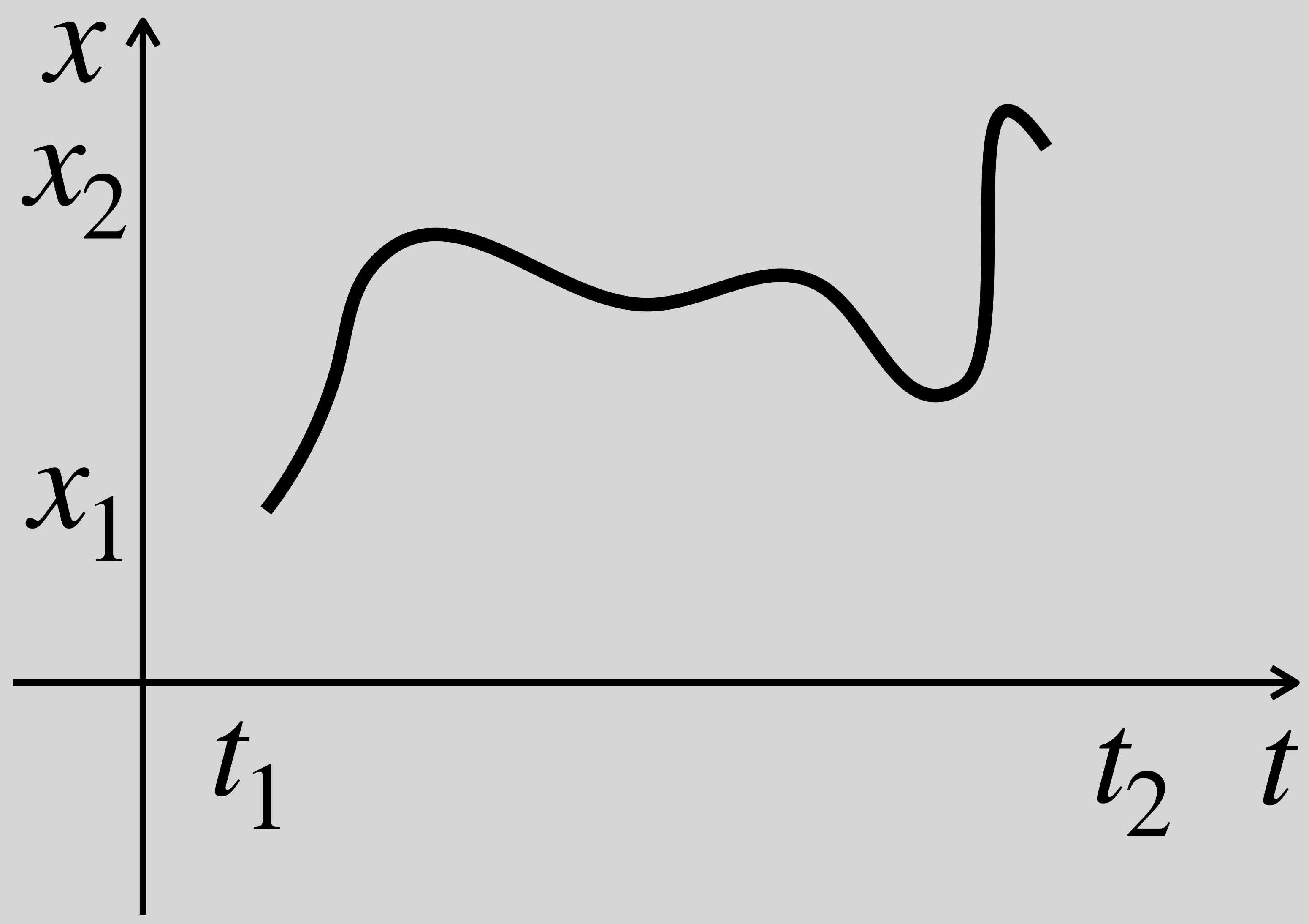
$$f(x + \Delta x) - f(x) = f'(x)\Delta x + \dots$$

- Как здесь быть?
- Нужно проварьировать!

Принцип наименьшего действия

- $x = v_0 t - gt^2/2$
- $L = T - U = mv^2/2 - mgx$ – **лагранжиан**
- $\int_{t_0}^{t_1} L dt \to min,\ x(t_0) = x_0,\ x(t_1) = x_1$
- $\sum L\Delta t_i \to min$
- Итак, мы хотим, чтобы

$$\int_{t_0}^{t_1} \left(m\dot{x}^2/2 - mgx\right) dt \to \min$$



Принцип наименьшего действия

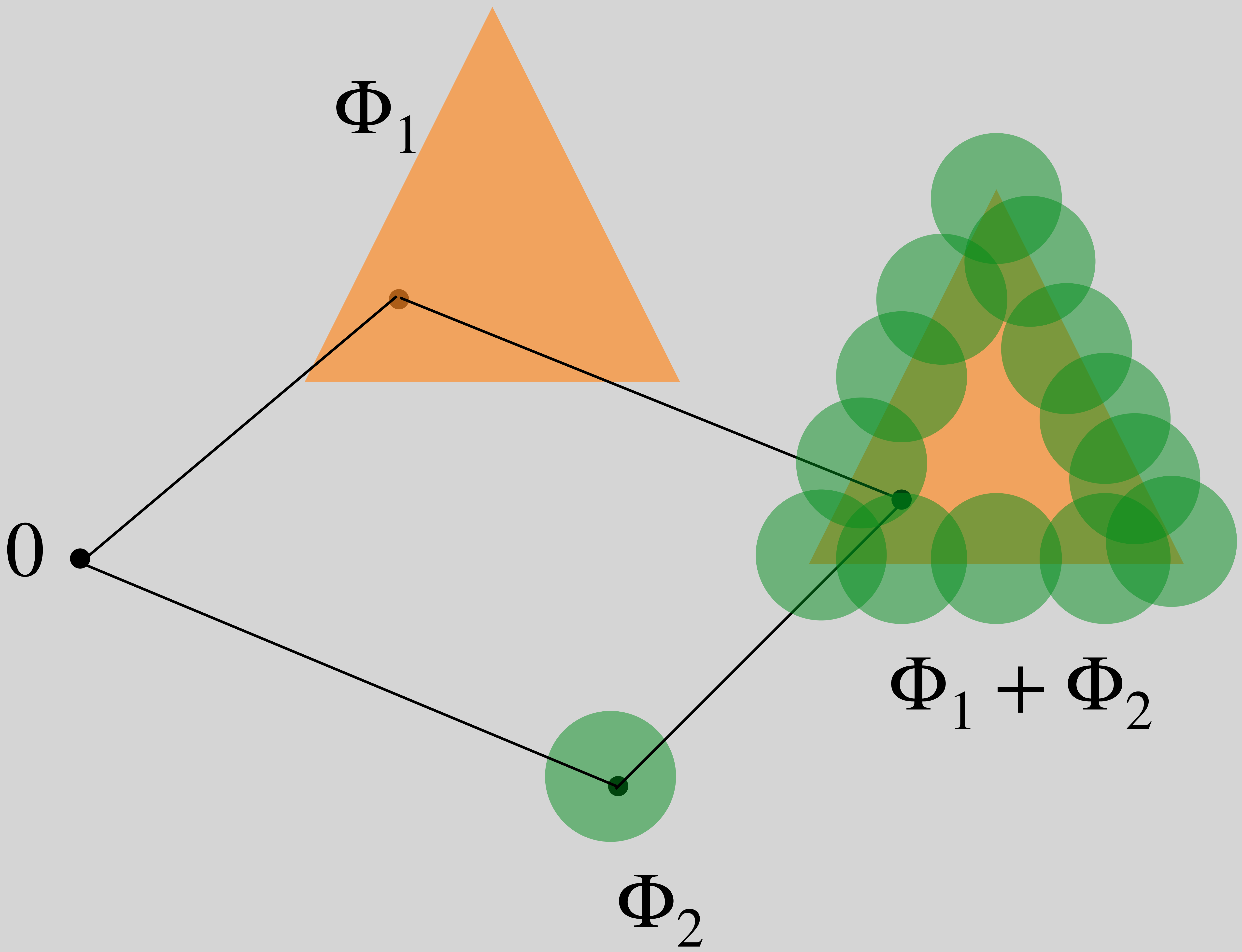
- $\delta S = S(x+h) - S(x) = \int\limits_{t_0}^{t^1} \left(\frac{m(\dot{x}^2 + \dot{h}^2)^2}{2} - mg(x+h) \right) dt - \int\limits_{t_0}^{t_1} \left(\frac{m\dot{x}^2}{2} - mgx \right) dt =$
- $= \int\limits_{t_0}^{t_1} \left(\frac{m}{2}(\dot{x}^2 + 2\dot{x}\dot{h} + \dot{h}^2) - mg(x+h) - \frac{m}{2}\dot{x}^2 + mgx \right) dt =$
- $= \int\limits_{t_0}^{t_1} (m\dot{x}\dot{h} - mgh + \frac{m}{2}\dot{h}^2) dt \approx \int\limits_{t_0}^{t_1} (m\dot{x}\dot{h} - mgh) dt = 0 \ \forall h : h(t_0) = h(t_1) = 0$

Принцип наименьшего действия

- $(uv)' = u'v + uv'$
- $\int\limits_a^b (uv)'dt = \int\limits_a^b u'vdt + \int\limits_a^b uv'dt = uv\,|_a^b$
- **Упражнение.** Проделайте $\int$- е по частям в первом слагаемом $\int\limits_{t_0}^{t_1} m\dot{x}\dot{h}dt$.
- Итак, $\delta S = 0 \Rightarrow \int\limits_{t_0}^{t_1} (-m\ddot{x} - mgh)dt = 0\ \forall h : h(t_0) = h(t_1) = 0$
- Отсюда $m\ddot{x} = -mgh$ – второй закон Ньютона

Сумма по Минковскому

- **Задача.** Пусть Φ – плоская фигура. Рассмотрим фигуру $\Phi + \varepsilon D$, где D – единичный круг, а $\varepsilon > 0$ – действительное число. Чему равно отношение $\big(S(\Phi + \varepsilon D) - S(\Phi)\big)/\varepsilon$ при малых ε?



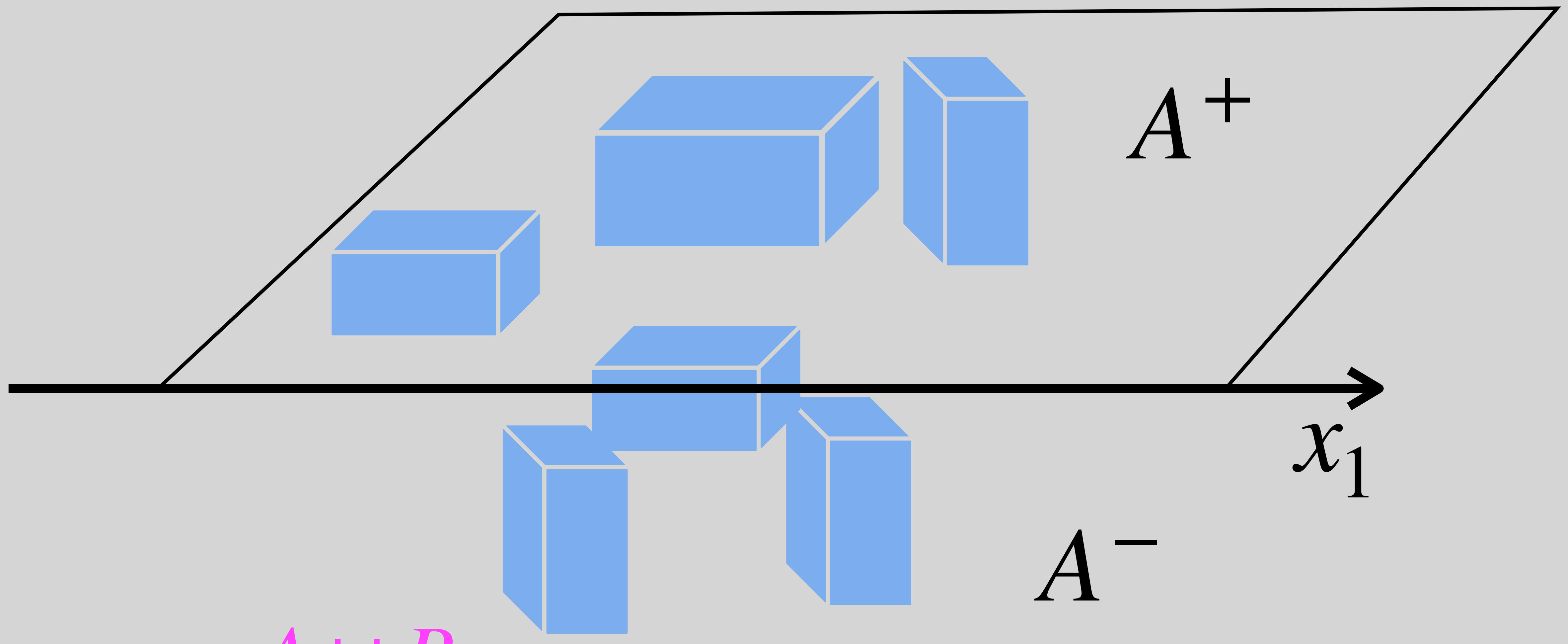
Брунн-Минковский

Теорема. Пусть A, B – хорошие подмножества $\mathbb{R}^n$. Тогда

$$\sqrt[n]{V(A+B)} \geqslant \sqrt[n]{V(A)} + \sqrt[n]{V(B)}$$

Доказательство

- **Вопрос.** Почему данное неравенство эквивалентно неравенству $\sqrt[n]{V(\lambda A + (1-\lambda)B)} \geqslant \lambda\sqrt[n]{V(A)} + (1-\lambda)\sqrt[n]{V(B)}\,\forall\lambda \in [0,1]$?
- Достаточно доказать теорему для случая, когда A, B – объединения неких параллелипедов
- Пусть $A^+ = A \cap \{x_1 \geqslant 0$, $A^- = A \cap \{x_1 \leqslant 0\}$
- $|A^+| \geqslant 1, |A^-| \geqslant 1$
- $\dfrac{V(A^+)}{V(A)} = \dfrac{V(B^+)}{V(B)}$
- $A^+ \cup B^+$, $A^- \cup B^-$ – собственные подмножества $A \cup B$
- Значит, мы можем применить предположение индукции к $A^\pm, B^\pm$



Доказательство

- Т. к. $A^+ + B^+ \cap A^- + B^- = \varnothing$, то
- $V(A+B) \geqslant V(A^+ + B^+) + V(A^- + B^-) \geqslant$
- $\geqslant \left(\sqrt[n]{V(A^+)} + \sqrt[n]{V(B^+)}\right)^n + \left(\sqrt[n]{V(A^-)} + \sqrt[n]{V(B^-)}\right)^n =$
- $= V(A^+)\left(1 + \sqrt[n]{\dfrac{V(B^+)}{V(A^+)}}\right) + V(A^-)\left(1 + \sqrt[n]{\dfrac{V(B^-)}{V(A^-)}}\right) =$
- $= \left(V(A^+) + V(A^-)\right)\left(1 + \sqrt[n]{\dfrac{V(B)}{V(A)}}\right) = \left(\sqrt[n]{A} + \sqrt[n]{B}\right)^n \blacksquare$

Изопериметрическое неравенство

Теорема. Для любого тела $K \subset \mathbb{R}^n$

$$\left(\frac{V(K)}{V(\mathbb{D}^n)}\right)^{\frac{1}{n}} \leqslant \left(\frac{S(K)}{S(\mathbb{D}^n)}\right)^{\frac{1}{n-1}}$$

Доказательство

- $S(K) = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \dfrac{V(K + \varepsilon \mathbb{D}^n) - V(K)}{\varepsilon}$, $S(K) = V(\partial K)$
- $V(K + \varepsilon D) \geqslant \left(\sqrt[n]{V(K)} + \varepsilon \sqrt[n]{V(\mathbb{D}^n)} \right) =$
- $= V(K) \left(1 + \varepsilon \sqrt[n]{\dfrac{V(\mathbb{D}^n)}{V(K)}} \right)^n \geqslant$
- $\geqslant V(K) \left(1 + n\varepsilon \sqrt[n]{\dfrac{V(\mathbb{D}^n)}{V(K)}} \right)$. **Вопрос.** Почему верно последнее неравенство?
- $S(K) \geqslant \dfrac{V(K) + V(K) \cdot n \cdot \varepsilon \cdot \sqrt[n]{\dfrac{V(\mathbb{D}^n)}{V(K)}} - V(K)}{\varepsilon} = nV(K) \sqrt[n]{\dfrac{V(\mathbb{D}^n)}{V(K)}} = nV(K)^{1-1/n} V(D)^{1/n}$

Доказательство

- **Задача*.** $S(\mathbb{S}^n) = nV(\mathbb{D}^n)$
- Значит, $\left(\dfrac{S(K)}{S(\mathbb{S}^n)}\right)^{\frac{1}{n-1}} \geqslant \left(\dfrac{nV(K)^{1-1/n}V(\mathbb{D}^n)^{1/n}}{nV(\mathbb{D}^n)}\right)^{\frac{1}{n-1}} =$
- $= \left(\dfrac{V(K)}{V(\mathbb{D}^n)}\right)^{1/n}$ ∎
- **Вопрос.** Почему из теоремы следует изопериметрическое свойство шара?