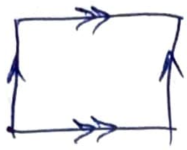
Некий план.

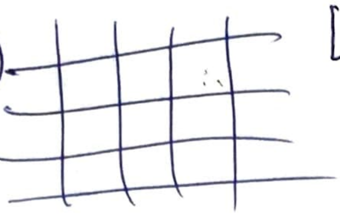
① Каково фазовое пр-во плоского математического маятника? А если маятник болтается в пр-ве? А если маятник двойной и плоский? А если двойной и пр-ый?

② ⤳ Знакомьтесь: мсье Тор $\mathbb{T}^2$.

Выписывание явных отождествлений.

Теорема Пуанкаре о возвращении.

1) 

2)  $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$

 $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$

$\mathbb{R} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$

$x \mapsto e^{2\pi i x}$.

$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$

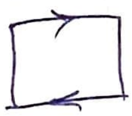
$(x, y) \mapsto (e^{2\pi i x}, e^{2\pi i y})$

3) ∃ ли на торе простая кривая, проходящая 2 раза меридиан и 1 раз параллель? А 2 раза меридиан и 3 раза параллель? А p раз меридиан и q раз параллель при $(p, q) = 1$? важное условие!

3') КРИВАЯ, ПЛОТНО ЗАПОЛНЯЮЩАЯ ТОР (ОБМОТКИ ТОРА).

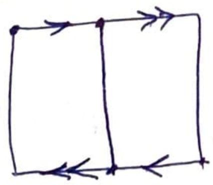
4) ∃ ли 2 кривые замкнутые простые, не разбивающие пов-ть тора на куски? А 3 не существуют!

③ Лента Мёбиуса.

1)  Выписывание явных отождествлений. Каков край? Неориентируемость.

2) Что будет, если её разр-ть пополам?  — так порвётся

 — А так?

 будет дважды перекрученная лента Мёбиуса.

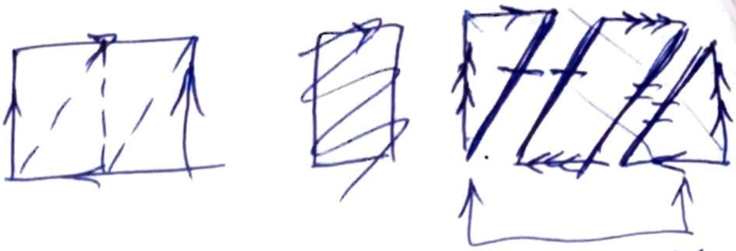
3) А если 2 раза разрезать пополам? будет трижды перекруч. лента.

4) А если разрез будет отступать от края на 1/3 ширины?

④ Бутылка Клейна.

1)  Неор-ое мн-ие бе

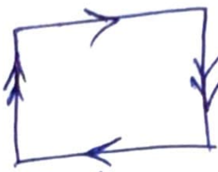
2) Докажите, что бутылку Клейна можно получить склеивая двух лент Мёбиуса по краю.



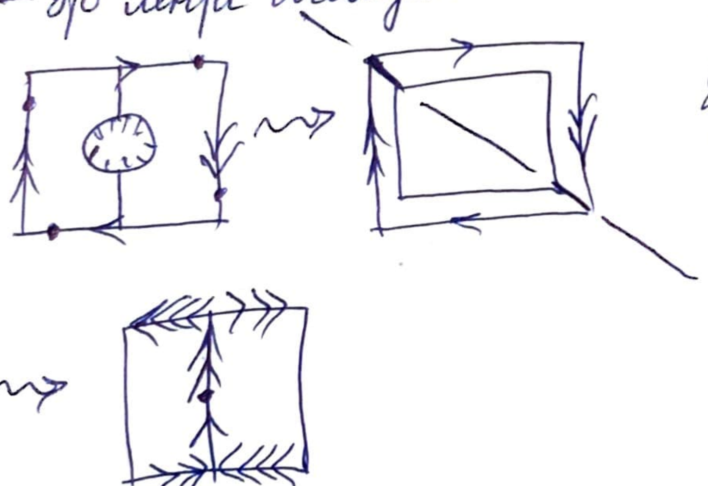
прислонить

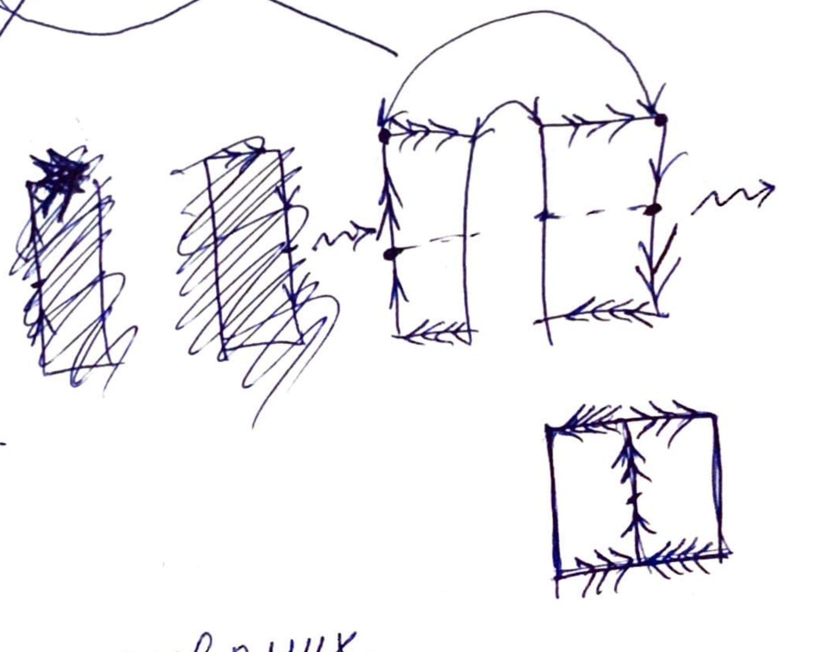
3) Докажите, что при помощи одного разреза бутылку Клейна можно превратить в ленту Мёбиуса.

⑤ Проективная плоскость.

1) 

2) Докажите, что $\mathbb{RP}^2 \setminus (\mathbb{D}^2)^{\circ}$ — это лента Мёбиуса.





⑥ Гомеоморфизмы.

1) Несколько слов о них.

2) $\mathbb{S}^2\setminus\{pt\}\approx\mathbb{R}^2$.

⑦ Гомотопическая экв-ть.

3)  $\not\approx$ .

⑧

[Пе]рвые цифры в десятичной записи 2^n. Какая цифра будет самой частой/редкой? S – число цифр в 2^n

Чтобы 2^n начиналось с цифры k: $k10^S \le \underbrace{2^n}_{} < 10^S \cdot (k+1)$

$\Longleftrightarrow S + \lg k \le n\lg 2 < S + \lg(k+1)$ Сколько цифр в этом числе?

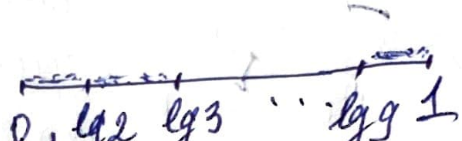
Ясно, что $n\lg 2 - S = \{n\lg 2\}$

Рассмотрим преобр. $x \mapsto x + \lg 2 \mod \mathbb{Z}$

Цель: $\lg k \le \{n\lg 2\} < \lg(k+1)$ – мы должны попасть в данный интервал.

Но точки $\{n\lg 2\}$ всюду плотны на отрезке $[0,1]$ $\Rightarrow$ ∞-много степеней двойки начинаются с цифры k.

Тогда вер-ть встретить степень 2-ки, начин-ся с цифры k, равна $\lg(k+1) - \lg k = \lg\frac{k+1}{k}$



всюду плотно располагаются степени 2-ки, начинающиеся с 1.

Длину отрезка можно взять за вероятность.

~~Пр~~
- „1" – 30%
- „2" – 18%
- „3" – 12%
- „4" – ~~9%~~ 10%
- „5" – 8%
- „6" – 7%
- „7" – 6%
- „8" – ~~…~~ 5%
- „9" – 4%

- Можно аналогично смотреть и на 1-ые цифры других натур-х чисел.
- На самом деле, можно обобщить: $\forall$ нат. числа k $\exists\, 2^n$, начинающаяся на число k в своей десятичной записи.

$\{\lg k\} \le \{n\lg 2\} < \{\lg(k+1)\}$

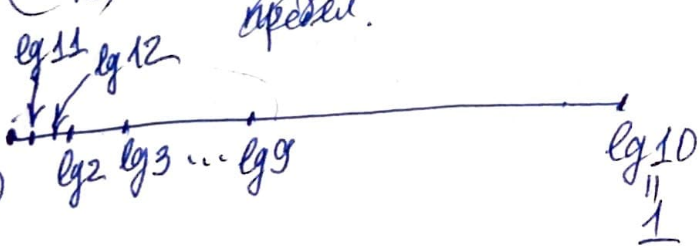
$\{\lg(k+1)\} - \{\lg k\} = \left\{\lg\left(1+\frac{1}{k}\right)\right\} \to 0,\ k \to \infty$, если $|k \pm 1| \ne 10^S$

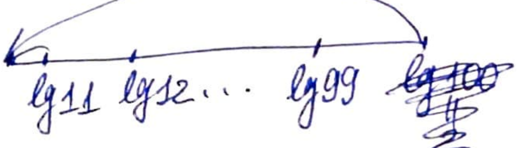
и $\underbrace{\left\{\lg\left(1+\frac{1}{k}\right)\right\}}_{>1}$ ~~убывающая~~ – положительная $\forall k$ $\Rightarrow$ Посл-ть $\{\lg k\}$ – возрастающая

$\| \lg\left(1+\frac{1}{k}\right)$

~~По теореме Вейерштрасса посл-ть $\{\lg k\}$ имеет предел.~~

~~4~~ длины соседних отрезков стремятся к 0.



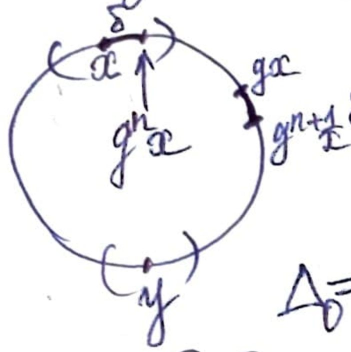


Теорема. Если преобр-е $g: \mathcal{D} \to \mathcal{D}$, $\mathcal{D}$ — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, сохраняет объём: $V(\mathcal{D}) = V(g\mathcal{D})$, g — биекция, то в $\forall$ окр-ти U точки $x \in \mathcal{D}$ найдётся точка $g^n x$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$.

Д-во: ~~Устройство~~ Рассмотрим мн-ва $g^S U$. Ясно, что они имеют одинаковый объём $\Rightarrow$ они не могут попарно не пересекаться в силу $V(\mathcal{D}) < \infty$. $\Rightarrow$ $g^k U \cap g^l U \neq \varnothing \underset{k>l}{\Rightarrow} g^{k-l} U \cap U \neq \varnothing$. □

Утв. $g^n x$ всюду плотно в S^1, где g — поворот на угол α, несоизм с π.

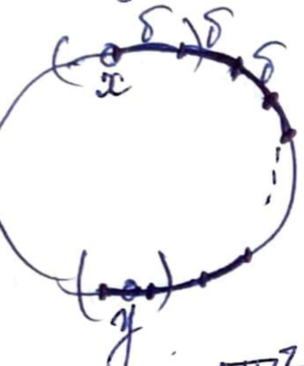
□



Зафиксируем две произвольные точки x и y, и ε-окрестность U_y^ε точки y. Возьмём такое N, чтобы $|g^N x - x| = \delta < \varepsilon$. Рассмотрим отрезок окружности

$$\Delta_0 = [x, g^N x] \rightsquigarrow \Delta_N = [g^N, g^{2N} x] \rightsquigarrow \ldots$$

Рано или поздно некий Δ_K пересечёт U_y^ε $\Rightarrow$



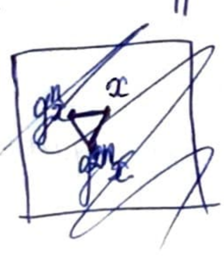
~~Возьмём $\forall z \in \Delta_K \cap U_y^\varepsilon$~~ $\Rightarrow$ край отрезка Δ_K попадёт в U_y^ε $\Rightarrow$

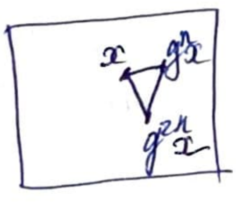
$\Rightarrow$ ~~отступ назад~~ но край отрезка имеет вид $g^S x$. □

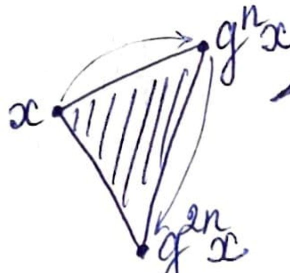
Утв. Для $\mathbb{T}^2$. $g^t: (\varphi_1, \varphi_2) \longmapsto (\varphi_1 + \alpha_1 t, \varphi_2 + \alpha_2 t)$

несоизмеримость

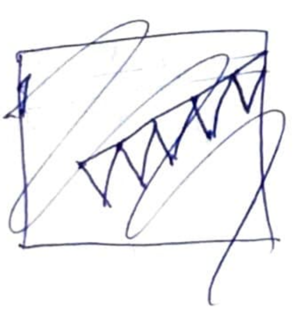
Д-во: Рассмотрим преобр-е g^n для $n \in \mathbb{N}$.

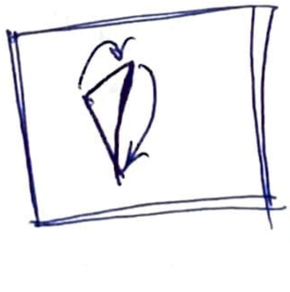






этот треугольник на торе покрывает всю его пов-ть, ибо такие треугольники могут пересекаться только по стороне





Первые цифры чисел 2^n

...одическое преобразование

$T: X \to X$ сохр. меру преобр-е на измеримом пр-ве (X, Σ, μ) с $\mu(X)=1$. Тогда T — эргодично, если $\forall E \in \Sigma$: $T^{-1}(E)=E$ либо $\mu(E)=0$, либо $\mu(E)=1$.

Теорема. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1} f(T^k x) = \frac{1}{\mu(X)}\int_X f\,d\mu$ $\left[= \mathbb{E}f, \text{ если } \mu(X)=1\right]$

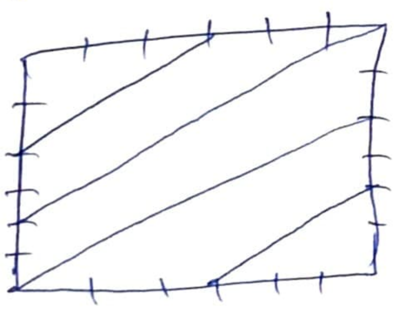
. Докажите, что $a_n + a_{n+10} = 100$ $\forall n \geq 2$, где $\{a_n\}$ — посл-ть, определённая последними 2-мя цифрами степеней числа 2.

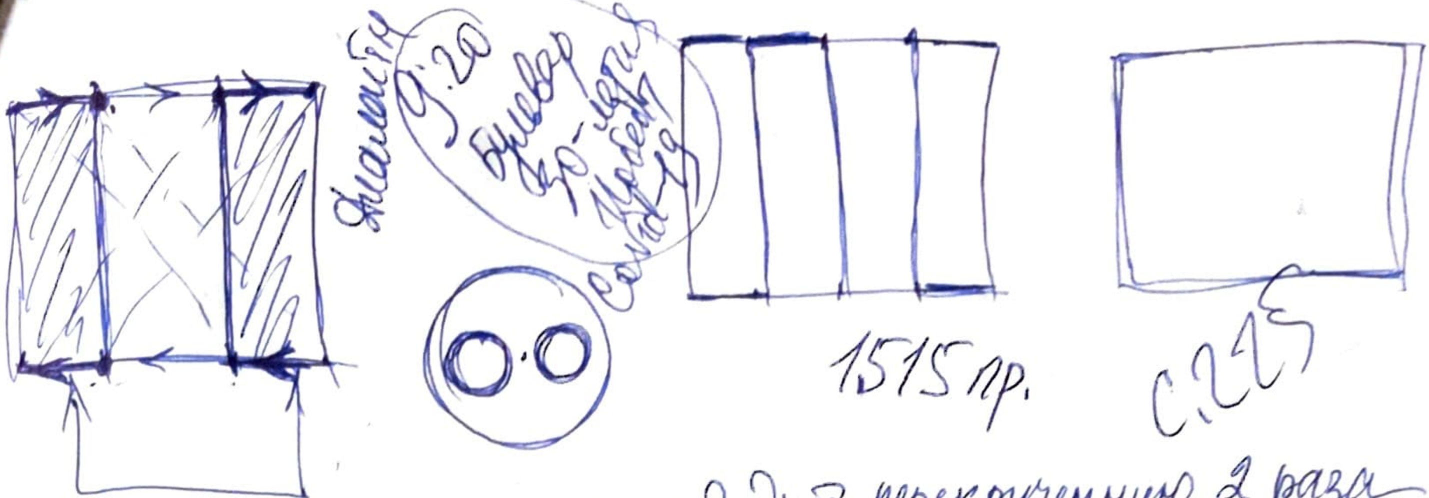
. $a_n + a_{n+50} = 1000$, $n \geq 3$ — a_n — 3 посл. цифры числа 2^n.

Закон Фрэнка Бэнфорда.

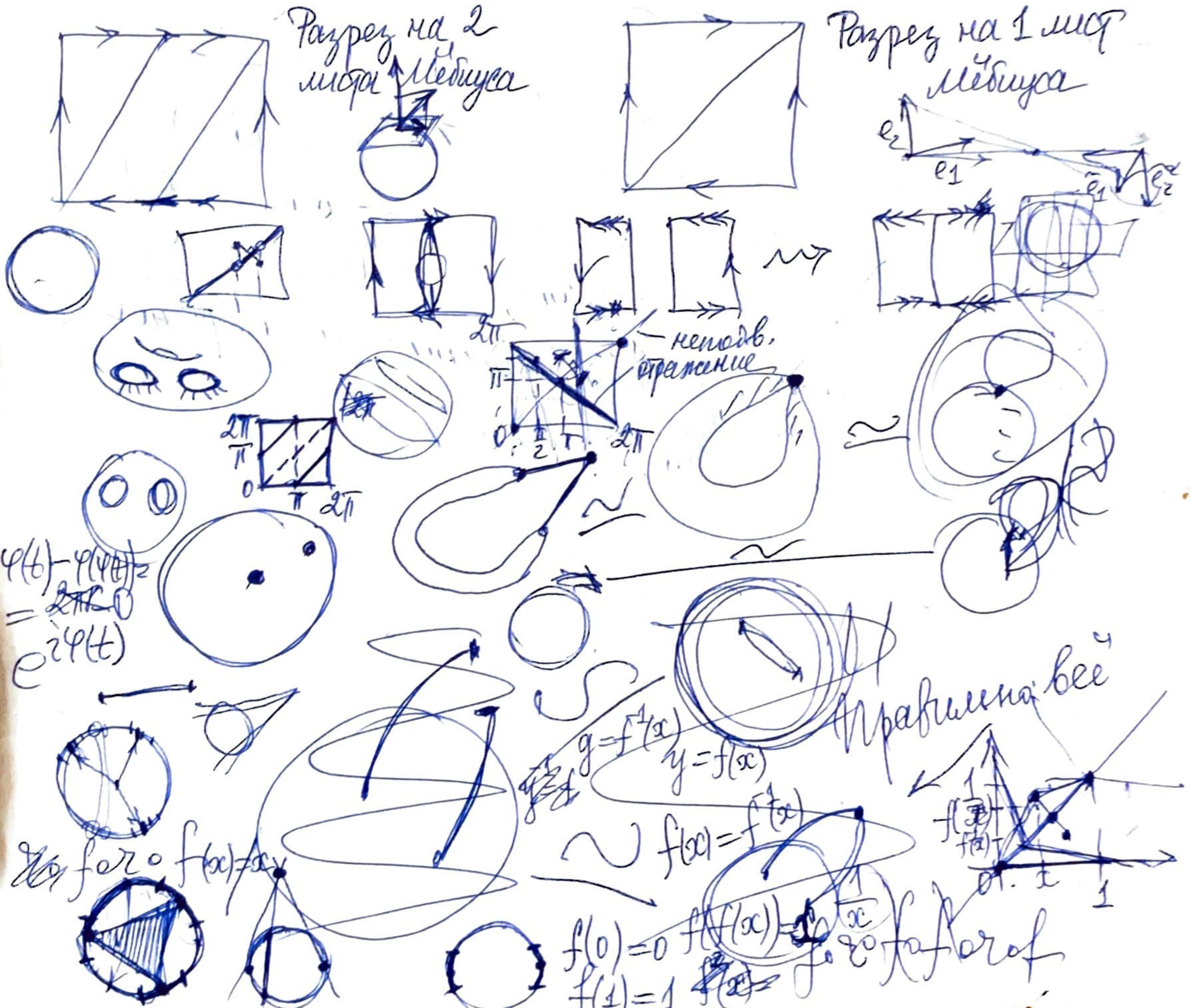
$\dot{x} \sim x$.

. Математик Дженнифер Голбек показала, что с помощью проверки на логарифм-ть распр-я можно оценить „подозр-ую активность". Оказалось, что $1^{я}$ цифра числа друзей друзей 1-го аккаунта должна подчиняться закону Бенфорда.





Две заштрихованные полоски дадут перекрученную 2 раза ленту Мёбиуса. А средняя полоска — обычную ленту Мёбиуса, причём они будут зацеплены.



Вопрос о м/н векторных полях на сфере.

Почему симплициальное ∪-произведение совпадает с сингулярным ∪-произведением?

Связная сумма и лемма-вопрос к задаче 5.

Задачник по линейной алгебре: Построить отобр. плоскости без неподв. точек (и инв. прямых) С.27 Прасолов

С.232

С.201

Какая петля реализует класс?

Лекция 7/11/2019 ТЧ

В книжке Дэвиса по топологии (# Дэвис.pdf) на с. 296 (pdf) имеется лемма 10.27 о том, что Sq^1 это ассоцииров.-ая с $0\to\mathbb{Z}_2\to\mathbb{Z}_4\to\mathbb{Z}_2\to 0$. $\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ (p.19)

Вообще про (стабильные) когомологические операции и все в книге Дэвиса — с. 286 (pdf).

17.2, 17.3, 17.21