Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова»

механико-математический факультет

кафедра высшей геометрии и топологии

выпускная квалификационная работа
(дипломная работа)
специалиста

Торическая топология ациклических симплициальных комплексов

Выполнил студент
605 группы
Корнев Михаил Игоревич

подпись студента

Научный руководитель:
чл.-кор. РАН, профессор
Бухштабер Виктор Матвеевич

подпись научного руководителя

Москва
2022

Содержание

§1 Введение

1.1 Актуальность исследования

В химии фуллереном называется молекула, которая представляет собой выпуклый многогранник с атомами углерода в вершинах, принадлежащих в точности трём углеродным кольцам длины 5 или 6. Математически фуллерен является трёхмерным выпуклым многогранником, все грани которого пяти- и шестиугольники, а в каждой вершине сходится ровно по три ребра (последнее условие является определением простого многогранника) [9].

Проблема классификации изомеров фуллеренов очень важна применительно к химии, физике, биологии и нанотехнологиям. В этой связи последнее время активно развивается математическая теория фуллеренов [5, 10]. Два изомера фуллерена считаются неотличимыми, если соответствующие многогранники имеют изоморфные решётки граней.

Простой трёхмерный многогранник называется погореловским, если он допускает реализацию в виде ограниченного многогранника с прямыми двугранными углами в трёхмерном пространстве Лобачевского [8]. В торической топологии имеется результат [9] о том, что два погореловских многогранника комбинаторно эквивалентны тогда и только тогда, когда изоморфны кольца когомологий соответствующих данным многогранникам момент-угол многообразий. Известно [9], что фуллерены являются погореловскими многогранниками, поэтому для них также справедлив данный результат. Таким образом, с каждым фуллереном можно ассоциировать алгебраическую структуру, которая однозначно характеризует его решётку граней.

Сопоставление фуллерену некоторого кольца мотивирует следующую конструкцию. Для каждого выбора семейства ацикличных групп $\{A_i\}$ имеется функтор T, впервые введённый Дэниелем Каном и Уильямом Тёрстоном в [24], 1976 (см. также [1, 29]). Функтор T сопоставляет полиэдральному разбиению P пространства X асферическое пространство $TX = K(G_P, 1)$ с такими же гомологиями и когомологиями, как у пространства X. Значит, каждому конечному полиэдральному разбиению пространства X функториально соответствует конечно определённая группа G_P.

В контексте конструкции функтора Кана-Тёрстона представляют интерес ацикличные группы. По определению это группы, гомологии которых устроены так же, как гомологии точки. В работах [3, 4, 1, 2] представлены известные результаты о таких группах и их роль в алгебраической топологии и комбинаторной теории групп. В частности, в работе трёх авторов [2], 1983 представлена конструкция универсальной конечно определённой ацикличной группы, использующая, в свою очередь, конструкцию универсальной группы из работы Хигмана [23], 1961. Последняя группа не имеет явного описания, и работа [11], 2016 устраняет этот недостаток, предъявляя более явное задание с 8-ю образующими и 26-ю соотношениями. Наиболее известной ацикличной группой является группа Hig_4, построенная вместе с группами Hig_n, $n \geqslant 5$ в работе Хигмана [22], 1951. Однако там группы Hig_n рассматриваются, как примеры конечно определённых групп, не содержащих нетривиальных собственных нормальных подгрупп конечного индекса, и факт об ацикличности Hig_n не приводится. Первое упоминание об ацикличности группы Hig_4, по-видимому, встречается в работе [1], 1980.

1.2 Цель и задачи исследования

Цель научного исследования: исследование свойств ацикличных групп и соответствия $P \mapsto G_P$ для полиэдральных разбиений P пространства X.

Задачи научного исследования:

1. Исследовать свойства ацикличных конечно определённых групп.

2. Описать копредставление соответствующей группы G_P по данному полиэдральному разбиению P клеточного пространства X.

3. Исследовать соответствие $P \mapsto G_P$ в контексте изомеров фуллеренов.

1.3 Методы исследования

В ходе исследования использованы и развиты методы комбинаторной теории групп и алгебраической топологии.

1.4 Результаты исследования

1. Построено бесконечное семейство примеров неасферичных ацикличных пространств. Замечено, что универсальной ацикличной группой может служить группа, имеющая задание с 12 образующими и 38 соотношениями. Для произвольной дискретной группы G построено нестягиваемое ацикличное пространство $\mathcal{E}G$, на котором группа G действует свободно.

2. Дан алгоритм построения конечно определённой группы G_P для любого конечного полиэдрального разбиения P клеточного пространства X.

3. Дан алгоритм построения по каждому фуллерену P с фиксированной ориентацией и данному ориентированному гамильтонову пути конечно определённой группы G_P.

§2 Напоминание о гомологиях дискретных групп

В настоящей работе, если не оговорено противное, все встречающиеся группы предполагаются дискретными, то есть рассматриваются в дискретной топологии.

По группе G можно, как известно, построить стягиваемый симплициальный комплекс EG со свободным действием G. Факторпространство $BG := {}^{EG}/_{G}$ называется *классифицирующим пространством* группы G. Существуют различные конструкции классифицирующих пространств для топологических и дискретных групп. Сюда относится конструкция с джойнами Милнора [32], конструкция Милграма [30], категорная конструкция через геометрическую реализацию некоторого симплициального множества [17] и др.

Классифицирующее пространство дискретной группы G имеет тип пространства Эйленберга-Маклейна $K(G,1)$ [18]. Напомним, что пространство $K(G,1)$ с точностью до гомотопической эквивалентности определяется из условий: $\pi_n(K(G,1)) = 0$, если $n > 1$ и $\pi_1(K(G,1)) = G$.

Определение 1. *Гомологиями дискретной группы G с тривиальными коэффициентами $\mathbb{Z}$* называются гомологии (симплициальные, клеточные и др.) классифицирующего пространства группы G, то есть $H_i(G;\mathbb{Z}) := H_i(BG;\mathbb{Z})$. В случае локальных коэффициентов в G-модуле M, это гомологии с локальными коэффициентами $H_i(BG;M)$.

Также гомологии группы G могут быть определены чисто алгебраическим путём:

Определение 2. *Гомологиями дискретной группы с коэффициентами в G-модуле M* называются группы $H_n(G,M) = \mathrm{Tor}_n^{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z},M)$.

Утверждение 1 (см., например, [7])**.** *Два определения 1 и 2 гомологий групп равносильны.*

Имеется следующий класс групп, не только важный для дальнейшего, но представляющий и самостоятельный интерес:

Определение 3. Группа G называется *ацикличной*, если её гомологии в тривиальном G-модуле $\mathbb{Z}$ устроены, как гомологии точки, т. е.

$$H_*(G) \cong H_*(\mathrm{pt}).$$

Заметим, что ацикличных групп относительно любой локальной системы коэффициентов не существует. Действительно, иначе по лемме Шапиро [7] мы бы имели изоморфизм

$$H_1(G, \mathbb{Z}[G/C]) \cong H_1(C) \cong C$$

для нетривиальной циклической подгруппы $C < G$.

В силу этого наблюдения, если не оговорено противное, под ацикличностью группы G будет пониматься именно ацикличность G относительно тривиального G-модуля $\mathbb{Z}$.

§3 Примеры ацикличных дискретных групп

Ацикличные группы могут возникать, как группы автоморфизмов больших объектов. Так, ацикличными является группа гомеоморфизмов $\mathbb{R}^n$ с компактными носителями [28] (в дискретной топологии), группа $\mathrm{GL}(V)$ обратимых преобразований бесконечномерного гильбертова пространства [13] (в дискретной топологии).

В маломерной топологии ацикличные группы могут встречаться, например, в качестве коммутантов групп узлов с тривиальными полиномами Александера [3] или как некоторое расширение группы кос на бесконечном числе нитей [4].

В этом параграфе приводятся явные конструкции из [1] конечно представленных ацикличных групп, классифицирующие пространства которых могут быть реализованы двумерными симплициальными комплексами.

3.1 Группа $\mathfrak{A}$

Рассмотрим простой пример нетривиальной ацикличной группы — группу $\mathfrak{A}$.

Для её построения сначала введём две группы:

$$F = \langle a, b \rangle,$$

$$C = \langle u = a,\ v = b^{-1}a^{-1}bab,\ w = b^{-2}ab^{-1}a^{-2}bab^2,\ x = b^{-3}ab^{-1}a^{-2}bab^3 \rangle.$$

Группа F — свободная на двух образующих, а группа C — свободная на четырёх образующих.

При помощи F и C мы можем получить группу

$$\mathfrak{A} = \{F_1 \star F_2; C_1 \cong_\varphi C_2\},$$

где $F_1,\ F_2$ — две копии группы F, а C_1, C_2 — копии группы C, причём склейка происходит вдоль изоморфизма $\varphi : C_1 \to C_2$, такого, что

$$u_1 \mapsto x_2,\ v_1 \mapsto w_2,\ w_1 \mapsto v_2,\ x_1 \mapsto u_2.$$

Утверждение 2. *Группа $\mathfrak{A}$ нетривиальна.*

Доказательство. Свободные группы нетривиальны, поскольку имеют нетривиальные первые гомологии (совпадающие с гомологиями букета окружностей). Но результат амальгамированного произведения двух нетривиальных групп по их общей подгруппе будет нетривиальной группой. Последнее следует из теоремы о нормальной форме для свободных произведений групп над общей подгруппой (см., например, [39]). $\square$

Утверждение 3 ([1]). *Группа $\mathfrak{A}$ является ацикличной.*

Доказательство. По построению группа $\mathfrak{A}$ является совершенной.

Кроме того, пространство $K(\mathfrak{A}, 1)$ можно реализовать в виде конечного клеточного двумерного комплекса, поскольку оно является пушаутом двух копий пространства $K(F, 1) \simeq \mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1$ вдоль пространства $K(C, 1) \simeq \mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1$, то есть

$$K(\mathfrak{A}, 1) = K(F, 1) \sqcup_{K(C,1)} K(F, 1).$$

Имеет место точная последовательность Майера-Виеториса с постоянными коэффициентами $\mathbb{Z}$

$$\ldots \to H_{n+1}\mathfrak{A} \to H_nC \to H_nF_1 \oplus H_nF_2 \to H_n\mathfrak{A} \to \ldots$$

В силу того, что $K(F, 1)$ и $K(C, 1)$ — букеты окружностей, сразу получается, что $H_n\mathfrak{A} = 0$ при $n > 2$. Рассмотрим теперь участок точной последовательности для случая $n = 2$:

$$0 \to H_2\mathfrak{A} \to H_1C \to H_1F_1 \oplus H_1F_2 \to 0.$$

Но обе свободные абелевы группы H_1C и $H_1F_1 \oplus H_1F_2$ имеют ранг 4. Следовательно, эпиморфизм между ними является изоморфизмом, и $H_2\mathfrak{A} = 0$ в силу точности.

$\square$

Для дальнейшего нам понадобится важная

Теорема 1 (Дж. Уайтхед, 1939, [44]). *Пусть группа G является копределом в категории* **Group** *следующей диаграммы*

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, hook] \arrow[d, hook] & A \arrow[d, dashed] \\ B \arrow[r, dashed] & G \end{tikzcd}$$

Тогда пространство $K(G,1)$ является копределом в категории **Top** *диаграммы*

$$\begin{tikzcd} K(C,1) \arrow[r] \arrow[d] & K(A,1) \arrow[d, dashed] \\ K(B,1) \arrow[r, dashed] & K(G,1) \end{tikzcd}$$

Следствие 1.1 ([1]). *Пусть $G = A \star_C B$ является свободным произведением групп A и B с объединённой подгруппой G. Предположим, что для групп A, B, C существуют конечные симплициальные комплексы $K(A,1)$, $K(B,1)$ и $K(C,1)$. Тогда $K(G,1)$ тоже может быть реализовано в виде конечного симплициального комплекса. Причём имеет место оценка на размерности*

$$\dim G \leqslant \max(\dim A, \dim B, 1 + \dim C).$$

Доказательство. Вложениям $C \hookrightarrow A$ и $C \hookrightarrow B$ соответствуют отображения классифицирующих пространств $K(C,1) \to K(A,1)$ и $K(C,1) \to K(B,1)$. Возьмём цилиндры этих отображений и склеим их вдоль комплекса $K(C,1)$. $\square$

Отсюда получается

Утверждение 4 ([1]). *Группа $\mathfrak{A}$ является ацикличной относительно тривиальной системы коэффициентов в $\mathbb{Z}$ и может быть реализована в виде конечного двумерного клеточного комплекса.*

3.2 Группы Хигмана Hig_n

Эти группы были предложены Г. Хигманом в работе [22], 1951, как примеры конечно определённых групп, не имеющих нетривиальных собственных подгрупп конечного индекса.

Случай $n = 4$. Рассмотрим группу

$$\mathrm{Hig}_4 = \langle a, b, c, d \mid a^{-1}ba = b^2, b^{-1}cb = c^2, c^{-1}dc = d^2, d^{-1}ad = a^2 \rangle.$$

Опишем, как можно получить эту группу при помощи операций HNN-расширения и амальгамированного свободного произведения.

Рассмотрим группу Баумслага-Солитера:

$$K := \mathrm{BS}(1,2) = \langle a, b \mid a^{-1}ba = b^2 \rangle.$$

Группа K является HNN-расширением группы $\langle b \rangle \cong \mathbb{Z}$ при помощи изоморфизма подгрупп $\langle b \rangle \cong \langle b^2 \rangle$. Заметим, что из теоремы о нормальной форме для HNN-расширений [39] следует, что группа K ненулевая, поскольку в неё вкладывается группа $\langle a \rangle$.

Дайер и Васкез показали, что верна

Теорема 2 (E. Dyer, A. T. Vasquez, 1972, [16])**.** *Пусть $P = \langle S \mid r \rangle$ — представление группы G с одним соотношением $r \in F(S)$, и r не является степенью (большей 1) никакого слова. Тогда клеточный двумерный комплекс, получаемый стандартной приклейкой двумерной клетки к букету окружностей, биективно соответствующих образующим из S вдоль слова r, асферичен.*

Следствие 2.1 ([1])**.** *Классифицирующим пространством группы K является двумерный комплекс, получаемый из букета двух окружностей некоторой приклейкой двумерной клетки.*

Из теорем Хопфа (см. например, [7]) очевидно следует, что $H_2(K) = 0$ и $H_1(K) = \mathbb{Z}$. Следовательно, мы знаем гомологии группы K:

Предложение 1.

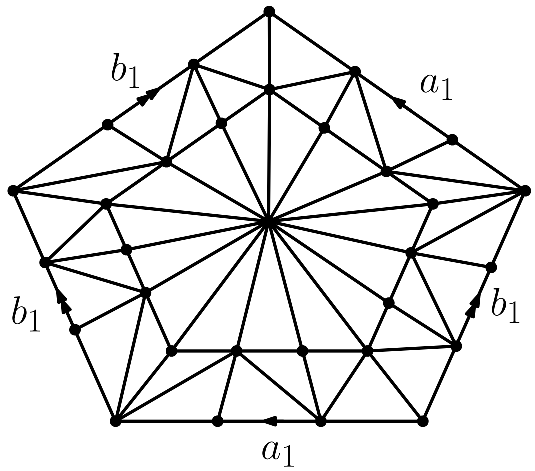
$$\begin{cases} H_n(K) = 0, & n \geqslant 2, \\ H_1(K) = \mathbb{Z} \end{cases}$$

Построим группу

$$L = K_1 \star_{\mathbb{Z}} K_2 = \langle a, b, c \mid a^b = a^2, b^c = b^2 \rangle,$$

где $K_i \cong K$, и склейка происходит вдоль вложений $\mathbb{Z} \cong \langle a \rangle \hookrightarrow L$, $\mathbb{Z} \cong \langle b \rangle \hookrightarrow L$. Очевидно, что $H_1(L) = \mathbb{Z}$. Из точной последовательности Майера-Виеториеса и предложения выше следует, что $H_n(L) = 0$ при $n \geqslant 2$.

Возьмём амальгаму $L_1 \star_{\mathbb{Z}\star\mathbb{Z}} L_2$, где $L_i \cong L$, со склейкой $\langle a_1, c_1 \rangle \cong \langle a_2, c_2 \rangle$ и получим группу Хигмана Hig_4.



$$BS(1,2) = \langle a_1, b_1 \mid b_1^{a_1} = b_1^2 \rangle$$

Рис. 1

Из теоремы Уайтхеда 1 и теоремы Дайера-Васкеза 2 следует, что $K(\mathrm{Hig}_4, 1)$ представляет собой двумерный клеточный комплекс с одной нульмерной клеткой, четырьмя одномерными клетками и четырьмя двумерными клетками.

Приведём здесь явную конструкцию симплициального комплекса, являющегося классифицирующим пространством группы Хигмана Hig_4:

- Сначала построим симплициальный комплекс для $K(\mathrm{BS}(1,2), 1)$, см. рис. 1.
- Теперь возьмём две копии таких триангулированных пятиугольников и склеим из них $K(L, 1)$, см. рис. 2.
- Наконец, возьмём две копии комплексов $K(L, 1)$ и склеим из них $K(\mathrm{Hig}_4, 1)$, см. рис. 3.

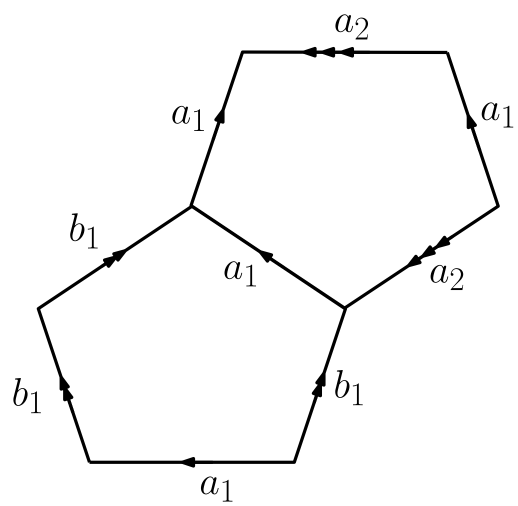
Ацикличность данного комплекса проверена на компьютере при помощи библиотеки `Gudhi` для `Python`.

Общий случай $n \geqslant 4$. Теперь рассмотрим обобщённую группу Хигмана

$$\mathrm{Hig}_n = \langle x_i,\ i \in \mathbb{Z}/_n \mid [x_{i-1}, x_i] = x_i \rangle,$$

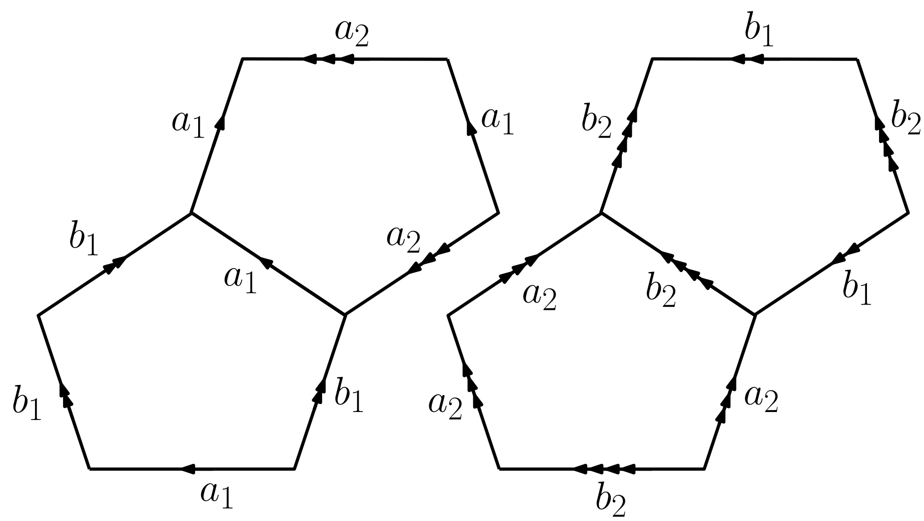
где $[a, b] = aba^{-1}b^{-1}$.

Утверждение 5 ([22])**.** *Для $n \leqslant 3$ группа* Hig_n *тривиальна.*



$$L = \langle b_1, a_1, a_2 \mid b_1^{a_1} = b_1^2,\ a_1^{a_2} = a_1^2 \rangle$$

Рис. 2



$$\mathrm{Hig}_4 = \{a_1, b_1, a_2, b_2 \mid b_1^{a_1} = b_1^2,\ a_1^{a_2} = a_1^2,\ a_2^{b_2} = a_2^2,\ b_2^{b_1} = b_2^2\}$$

Рис. 3

Доказательство. Случай $n = 2$ очевиден. Пусть теперь $n = 3$. Выразим образующую x_3 через x_1, x_2. Тогда мы получим равенство подгрупп, порождённых соответствующими элементами: $\mathrm{gp}\{x_1, x_2, x_3\} = \mathrm{gp}\{x_1, x_2\}$. Но, с одной стороны, очевидно, что коммутант $\{x_1, x_2, x_3\}' = \{x_1, x_2, x_3\}$. А с другой стороны, коммутант $\{x_1, x_2\}' = 0$. □

Утверждение 6. *При $n \geqslant 4$ группа Hig_n нетривиальна.*

Данное утверждение будет следовать из конструкции Hig_n ниже. Дело в том, что конструкцию последовательных амальгам для Hig_4 можно обобщить на случай Hig_n $(n \geqslant 4)$.

Будем обозначать через K_i группы, изоморфные группе Баумслага-Солитера

$$K = \langle x, h \mid [h, x] = x \rangle,$$

буквы алфавита которых такие же, как у K но с индексами i. Также обозначим

$$L = \langle K_0, K_1 \mid x_0 = h_1 \rangle.$$

Тогда группа Хигмана Hig_n следующего порядка получается из группы

$$G_{n-1} = \langle K_2, ..., K_{n-1} \mid x_2 = h_3, ..., x_{n-2} = h_{n-1} \rangle$$

амальгамой с группой L:

$$\mathrm{Hig}_n = G_{n-1} \star_{\mathbb{Z}\star\mathbb{Z}} L,$$

где склейка происходит вдоль свободных подгрупп $\langle h_0, x_1 \rangle$ и $\langle x_{n-1}, h_2 \rangle$ и $h_0 \sim x_{n-1}$, $x_1 \sim h_2$.

Заметим, что

$$G_n = G_{n-1} \star_{\mathbb{Z}} K$$

с отождествлением $x_{n-1} = h_n$.

Из следствия к теореме [16] и данного выше построения группы Hig_n при помощи амальгам из n групп Баумслага-Солитера K, в силу утверждения 3 классифицирующее пространство группы Хигмана будет конечным двумерным клеточным комплексом. А именно, имеет место

Теорема 3 ([33])**.** *Пространство $K(\mathrm{Hig}_n, 1)$ гомотопически эквивалентно двумерному комплексу с одной нульмерной клеткой, n одномерными клетками и n двумерными клетками.*

Таким образом, ацикличность групп Hig_n в размерностях, больших двойки, следует незамедлительно. При помощи последовательности Майера-Вйеториеса можно показать тривиальность гомологий в размерностях 1 и 2. Для этого докажем лемму:

Лемма 1. *Группы* G_k $(k \geqslant 3)$ *имеют следующие гомологии:*

$$H_n(G_k) = 0,\ n \geqslant 2,$$

$$H_1(G_k) = \mathbb{Z}.$$

Доказательство. Будем вести индукцию по k для G_k. База: при $k = 3$ группа G_3 изоморфна группе L, которую мы рассмотрели выше.

Допустим, что теорема выполняется для группы G_{k-1}. Рассмотрим $G_k = G_{k-1} \star_{\mathbb{Z}} K$ и напишем точную последовательность Майера-Виеториеса. Из неё или из соображения геометрической размерности очевидно будет следовать, что $H_n(G_k) = 0$ при $n \geqslant 3$. Рассмотрим случай $n = 2$:

$$0 \to H_2(G_k) \to \mathbb{Z} \to H_1(G_{k-1}) \oplus H_1(K) \to H_1(G_k) \to 0.$$

Абеленизация группы G_k равна $\mathbb{Z}$ в силу того, что в каждом слагаемом L_i элемент x_i является коммутатором, а элемент h_i склеивается с элементом x_{i-1} для всех $i = 3, ..., n$. Лишь элемент h_n не склеится ни с каким коммутатором, и, следовательно, будет образующим абеленизации. Но тогда в силу точности $H_2(G_k) = 0$. $\square$

Следствие 3.1. *Группы Хигмана* Hig_n *ацикличны.*

Доказательство. Очевидно, что Hig_n совершенна. По теореме 3 группа Hig_n имеет геометрическую размерность 2. Осталось показать, что $H_2(\mathrm{Hig}_n) = 0$. Имеем

$$0 \to H_2(\mathrm{Hig}_n) \to \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \to H_1(G_{n-1}) \oplus H_1(L) \to H_1(\mathrm{Hig}_n).$$

По предложению выше $H_1(G_{n-1}) = \mathbb{Z}$ и $H_1(L) = \mathbb{Z}$. Следовательно, третья стрелка — изоморфизм. Значит, $H_2(\mathrm{Hig}_n) = 0$ из точности. $\square$

Следствие 3.2. *Группа* Hig_n *не имеет кручения.*

Доказательство. Классифицирующее пространство группы Хигмана Hig_n является двумерным комплексом, поэтому группа Hig_n не имеет кручения. $\square$

Альтернативное доказательство следствия 3.2 может быть выведено из теорем о нормальных формах для амальгамированного произведений и HNN-расширений. А именно, справедливы следующие теоремы:

Теорема 4 ([27, 39])**.** *Пусть* $K := G \star_{\varphi} H$ *является амальгамированным произведением,* $\varphi : A \to B$ *— склеивающий изоморфизм между подгруппами* $A < G$ *и* $B < H$*. Тогда каждый элемент конечного порядка в* K *сопряжён элементу из* G *или* H*.*

Теорема 5 ([27, 39]). *Пусть $H := G\star_{\varphi_1,\dots,\varphi_n}$ — HNN-расширение группы G, где $\varphi_i : A_i \to B_i$ являются изоморфизмами некоторых подгрупп A_i и B_i группы G. Тогда каждый элемент кручения H сопряжён элементу G.*

§4 Ацикличные пространства и гомологические сферы

Определение 4. Клеточный комплекс X называется *ацикличным*, если

$$H_*(X) \cong H_*(\mathrm{pt})$$

Заметим, что нестягиваемые ацикличные пространства, в силу теоремы Гуревича и теоремы Уайтхеда, обязаны иметь нетривиальные фундаментальные группы. Кроме того, не существует ацикличных пространств относительно любой системы локальных коэффициентов, поскольку справедливо следующее обобщение теоремы Уайтхеда:

Теорема 6 ([36]). *Пусть отображение $f : X \to Y$ между отмеченными клеточными комплексами индуцирует изоморфизм фундаментальных групп и изоморфизм гомологий с любыми локальными коэффициентами $\mathcal{A}$, т. е.*

$$H_*(X; f^*\mathcal{A}) \cong H_*(Y; \mathcal{A}).$$

Тогда f является гомотопической эквивалентностью.

Доказательство. Будем считать, что X и Y связные. Поднимем отображение f на универсальное накрытие так, чтобы $\widetilde{f}(\widetilde{x_0}) = \widetilde{y_0}$, где $\widetilde{x_0}$ и $\widetilde{y_0}$ — некоторые поднятия отмеченных точек x_0 и y_0. В силу классической теоремы Уайтхеда для односвязного случая и в силу теоремы Гуревича, достаточно показать, что $\widetilde{f}$ индуцирует изоморфизм в гомологиях $H_*(\widetilde{X}; \mathbb{Z}) \cong H_*(\widetilde{Y}; \mathbb{Z})$. Запишем спектральные последовательности Лере для универсальных накрытий p_1 и p_2 над пространствами X и Y, рассматриваемых, как расслоения с дискретным слоем:

$$H_p(X; H_q(G)) \Rightarrow H_*(\widetilde{X}),$$

$$H_p(Y; H_q(G)) \Rightarrow H_*(\widetilde{Y}),$$

где $G = \pi_1(X)$.

В силу дискретности G, спектральные последовательности вырождаются во втором члене, и поэтому мы имеем следующую диаграмму

$$\begin{tikzcd} H_n(X;p_{1*}\mathbb{Z}) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "f_*"'] & H_n(\widetilde{X};\mathbb{Z}) \arrow[d, "\widetilde{f}_*"] \\ H_n(Y;p_{2*}\mathbb{Z}) \arrow[r, "\cong"] & H_n(\widetilde{Y};\mathbb{Z}) \end{tikzcd}$$

Здесь через $p_{1*}\mathbb{Z}$ и $p_{2*}\mathbb{Z}$ обозначены (возможно разные) G-модули $\mathbb{Z}$. Но $f^*(p_{2*}\mathbb{Z}) = p_{1*}\mathbb{Z}$. Следовательно, по условию f_* в левом столбце диаграммы индуцирует изоморфизм. А значит, мы имеем искомый изоморфизм в правом столбце диаграммы.

$\square$

Основным источником примеров ацикличных пространств служат классифицирующие пространства ацикличных групп. Однако не все ацикличные пространства являются асферичными. Соответствующее семейство примеров будет приведено в §4.2.

4.1 Функтор Дрора

Оказывается, ацикличные пространства можно получать из любого клеточного комплекса применением некоторого функтора.

Дрор в работе [15] показал, что в категории симплициальных множеств с отмеченной точкой $\mathbf{sSet}_*$ имеется эндофунктор

$$A : \mathbf{sSet}_* \to \mathbf{sSet}_*$$

и естественное отображение

$$a : AX \to X,$$

такое, что

1. AX ациклично для любого $X \in \mathbf{sSet}_*$;

2. Отображение $a : AX \to X$ универсально с точностью до гомотопии среди всех отображений из ацикличного пространства в X;

3. Пусть $H_j(X) \cong 0$ для любого $1 \leqslant j \leqslant n$. Тогда гомотопический слой отображения $a : AX \to X$ является $(n-1)$-связным. В частности, если X ациклично, то a — слабая эквивалентность.

4. Если X является j-простым пространством для некоторого $j \geqslant 1$ (т. е. действие $\pi_1(X)$ на $\pi_j(X)$ тривиально), то таково же и AX.

Функтор A задаётся на пространстве X, как предел

$$AX = \lim A_n X,$$

башни расслоений

$$\ldots \to A_n X \to \ldots \to A_1 X \to A_0 X = X.$$

Башня строится индуктивно. Отображение $p_1 : A_1 X \to X$ получается, как накрытие над X, соответствующее максимальной совершенной нормальной подгруппе $\pi_1(X)$. Далее, $A_n X$ получается, как предел диаграммы

$$\begin{tikzcd} A_n X \arrow[r, dashed] \arrow[d, dashed] & \Lambda P_n \mathbb{Z} A_{n-1} X \arrow[d] \\ A_{n-1} X \arrow[r] & P_n \mathbb{Z} A_{n-1} X \end{tikzcd} \tag{1}$$

В этой диаграмме Λ — функтор путей; $\mathbb{Z}$ — функтор, ассоциирующий с симплициальным множеством Y симплициальную абелеву группу $\mathbb{Z}Y$, её n-симплексами служат все возможные линейные комбинации n-симплексов из Y_n; P_n — функтор, сопоставляющий симплициальному множеству его n-ый этаж системы Мура-Постникова. При этом $P_n X$ определяется, как факторпространство X по отношениям эквивалентности $\sim_n$, при которых $x_1 \sim_n x_2$ (здесь x_1 и x_2 некоторые q-мерные симплексы), если ограничения симплексов x_1 и x_2 на n-мерные остовы совпадают.

Однако мы не можем утверждать, что в образе функтора Дрора могут быть пространства, не являющиеся классифицирующими пространствами некоторых ацикличных групп.

Вопрос 1. *Существует ли такой клеточный комплекс X, что пространство AX не является классифицирующим пространством некоторой группы?*

4.2 Гомологические сферы и диски

В топологии важную роль играют гомологические сферы и диски.

Определение 5. *Гомологической n-сферой* называется гладкое замкнутое n-мерное многообразие Σ^n, гомологии которого в $\mathbb{Z}$ устроены так же, как у стандартной сферы $\mathbb{S}^n$, то есть $H_*(\Sigma^n; \mathbb{Z}) \cong H_*(\mathbb{S}^n; \mathbb{Z})$. *Гомологическим диском* называется гладкое замкнутое ацикличное многообразие.

Первый пример трёхмерной гомологической сферы привёл Анри Пуанкаре. Она получалась при некоторой склейке граней додекаэдра [35].

Согласно теореме Пуанкаре, гомологическая сфера с тривиальной фундаментальной группой гомеоморфна стандартной сфере. В размерностях больше 4 это было доказано Стивеном Смейлом при помощи теоремы об h-кобордизме (необходимые ссылки и доказательства можно найти в [31]). В 1982 году Майкл Фридман получил классификационные результаты о четырёхмерных многообразиях с точностью до гомеоморфизма, из которых следовало, в частности, доказательство гипотезы Пуанкаре для размерности 4 (ссылки см. в монографии [37]). После этого, в 2002-2003 годах Григорий Перельман получил доказательство в размерности 3 при помощи потоков Риччи [34].

Мишель Кервер в работе [26], 1969 задался вопросом о том, какой может быть фундаментальная группа гомологической сферы и получил полный ответ для размерностей $n \geqslant 5$, а также частичные продвижения для размерностей 3 и 4.

Прежде, чем сформулировать основной результат М. Кервера, для удобства введём

Определение 6. Конечно представленная группа G *реализуема* гомологической n-мерной сферой, если существует некоторая гомологическая n-мерная сфера с фундаментальной группой G.

Пусть π — некоторая группа с g образующими и r соотношениями. Чтобы π была реализуема гомологической n-сферой, необходимо, чтобы выполнялись следующие условия: π имеет конечное копредставление, $H_1(\pi) = 0$, $H_2(\pi) = 0$. Последнее соотношение следует из известной теоремы Х. Хопфа:

Теорема 7 (Х. Хопф). *Пусть X — связный CW-комплекс. Тогда имеется точная последовательность групп:*

$$\pi_2(X) \xrightarrow{h} H_2(X;\mathbb{Z}) \to H_2(\pi_1(X);\mathbb{Z}) \to 0,$$

где h — гомоморфизм Гуревича, а действие $\pi_1(X) \rightharpoondown \mathbb{Z}$ тривиально.

Доказательство. В силу того, что пространство $K(\pi_1(X), 1)$ получается из пространства X приклеиванием клеток размерности не меньше 3, отсюда сразу же следует сюръективность. То, что имеется точность во втором члене следует из того, что образ фундаментального класса двумерной сферы любого сфероида из $\pi_2(X)$ является границей некоторой трёхмерной клетки в $K(\pi_1(X, 1))$. $\square$

Определение 7. Если группа π удовлетворяет соотношению $H_1(\pi) = 0$, то она называется *совершенной*. Если π удовлетворяет сразу двум соотношениям $H_1(\pi) = H_2(\pi) = 0$, то она называется *суперсовершенной*.

Теорема 8 (M. Kervaire, 1969, [26]). *Пусть π — суперсовершенная конечно определённая группа, и пусть $n \geqslant 5$. Тогда существует гладкая гомологическая n-сфера с фундаментальной группой π.*

Схема доказательства. (С. П. Новиков, 1962, [43]) По представлению группы π образующими и соотношениями построим $(n+1)$-мерное многообразие с краем

$$M^{n+1} = \left(\mathbb{D}^{n+1} \bigcup_{g_1,\ldots,g_k} \mathbb{D}^n_j \times \mathbb{D}^1_j\right) \bigcup_{r_1,\ldots,r_\ell} \mathbb{D}^{n-1}_q \times \mathbb{D}^2,$$

где склейка происходит со стандартным сглаживанием по отображениям

$$g_j : \mathbb{D}^n_j \times \partial\mathbb{D}^1_j \to \partial\mathbb{D}^{n+1},$$

$$r_q : \mathbb{D}^{n-1}_q \times \partial\mathbb{D}^2_q \to \partial\left(\mathbb{D}^{n+1} \bigcup_{g_1,\ldots,g_k} \mathbb{D}^n_j \times \mathbb{D}^1_j\right),$$

которые соответствуют образующим и соотношениям группы π.

По условию $H_2(\pi) = 0$, поэтому в группе $H_2(\partial M)$ по теореме Хопфа, сформулированной выше, все циклы являются сферическими. Реализуем свободный базис $H_2(\partial M)$ сферами $\mathbb{S}^2_\alpha \times \mathbb{D}^{n-2}_\alpha \subset \partial M$ и сделаем вдоль них хирургию. Тогда мы убьём вторую гомотопическую группу (здесь существенно, что $n \geqslant 5$) и, следовательно, получим нулевые вторые гомологии для многообразия ∂M. По построению и исходя из клеточных гомологий, у M не могут быть гомологии в остальных размерностях (кроме размерности n). Стало быть, мы имеем гомологическую сферу ∂M. □

Замечание. Из теоремы Паункаре для старших размерностей следует, что если многообразие M из приведённой схемы доказательства односвязно, то ∂M — это стандартная сфера.

Рассуждение С. П. Новикова позволяет строить примеры ацикличных пространств, не имеющих тип $K(\pi, 1)$.

Следствие 8.1. *Существуют ацикличные пространства, не имеющие типа* $K(\pi, 1)$

Доказательство. Возьмём любую конечную суперсовершенную группу π. Например, бинарную группу икосаэдра $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_5) \cong \langle a, b \,|\, (ab)^2 = a^3 = b^5\rangle$.

Построим компактное гладкое многообразие: гомологический диск с фундаментальной группой π при помощи конструкции С. П. Новикова выше. Этот гомологический диск будет искомым ацикличным пространством, поскольку его фундаментальная группа конечна (и следовательно, не может иметь своим классифицирующим пространством компактное многообразие).

□

Суперсовершенных групп довольно много. Бесконечное семейство примеров дают специальные линейные группы над конечными полями:

Теорема 9 ([12]). *При $n \geqslant 3$ группа*

$$\mathrm{SL}(n, \mathbb{F}_q) \text{ — } \textit{суперсовершенная,}$$

за исключением трёх случаев:

$$\mathrm{SL}(3, \mathbb{F}_2),\ \mathrm{SL}(4, \mathbb{F}_2),\ \mathrm{SL}(3, \mathbb{F}_4).$$

Группы из теоремы 9 являются конечными, а потому они, как видно из теоремы Свана ниже, не могут быть ацикличными.

Теорема 10 (R. G. Swan, 1960, [40]). *Пусть G — конечная группа и H — нетривиальная подгруппа в G. Тогда индуцированное отображение $H_i(H) \to H_i(G)$ нетривиально для бесконечного числа значений i. В частности, если $H = G$, то $H_i(G)$ нетривиальна для бесконечного числа значений i.*

В настоящее время отсутствует полное описание класса конечно определённых суперсовершенных групп, которые реализуются гомологическими n-мерными сферами при $n = 3, 4$.

В работе М. Кервера доказывается, что фундаментальная группа гомологической трёхмерной сферы должна иметь сбалансированное копредставление, т. е. число образующих в таком копредставлении должно быть равно числу соотношений.

Так, примером конечной группы, реализуемой гомологической трёхмерной сферой, служит бинарная группа икосаэдра $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_5)$, причём она является единственной возможной конечной группой с таким свойством [26].

Группа Хигмана Hig_4, как и вообще, любая ацикличная конечно определённая группа, дают примеры нереализуемых групп в размерности 3, поскольку имеет место следующий факт:

Теорема 11 (A. Berrick, J. Hillman, 2003, [4]). *Фундаментальная группа, отличная от тривиальной, любого 3-мерного многообразия не может быть ацикличной.*

Доказательство. Предположим, что трёхмерное многообразие M имеет ацикличную фундаментальную группу $\pi_1(M) = \pi$. В силу того, что π совершенна, всякий гомоморфизм $\pi \to \mathbb{Z}_2$ тривиален. Значит, группа π не имеет подгрупп индекса 2. Это влечёт тривиальность ориентирующего накрытия $\widetilde{M} \to M$ и, следовательно, ориентируемость многообразия M.

По теореме Скотта о ядре [38] существует компактное трёхмерное подмногообразие N, такое что включение $N \hookrightarrow M$ индуцирует изоморфизм $\pi_1(N) \cong \pi_1(M)$. Отсюда следует, что $\pi_1(M)$ конечно определённая и N ориентируемо.

Запишем участок точной последовательности пары $(N, \partial N)$, воспользуемся двойственностью Пуанкаре и совершенностью группы $\pi_1(N)$:

$$0 = H^1(N) \cong H_2(N, \partial N) \to H_1(\partial N) \to H_1(N) = 0,$$

откуда $H_1(\partial N) = 0$. Но ∂N есть объединение двумерных замкнутых поверхностей. Это означает, что ∂N есть объединение двумерных сфер.

Заклеим эти сферы дисками и получим замкнутое многообразие P. Можно считать, что многообразие P является простым, то есть не представляется в виде связной суммы двух трёхмерных многообразий, каждое из которых не гомеоморфно сфере. Действительно, всякое трёхмерное компактное ориентируемое многообразие можно разложить в связную сумму простых [20], а фундаментальная группа будет представлять собой свободное произведение фундаментальных групп многообразий из разложения.

Итак, пусть P — простое замкнутое ориентируемое трёхмерное многообразие. Согласно классификации трёхмерных многообразий, имеются следующие возможности:

1. P асферично. Тогда $H_3(\pi) \cong H_3(P) \cong \mathbb{Z} \neq 0$.

2. $P \simeq \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2$. Тогда $H_1(\pi) = H_1(P) \cong \mathbb{Z} \neq 0$.

3. Группа π конечна. Но конечных нетривиальных ацикличных групп не существует согласно теореме 10.

□

Однако в размерностях, начиная с 5, всякая ацикличная конечно определённая группа реализуема гомологической n-мерной сферой (согласно теореме 8). Получается, что класс реализуемых групп в размерности 3 меньше, чем класс реализуемых групп в размерности 5.

В размерности 4 остаётся открытым

Вопрос 2. *Всякая ли ацикличная конечно определённая группа может быть реализована гомологической четырёхмерной сферой?*

Гипотеза. Универсальная ацикличная группа $\mathfrak{U}$ (см. ниже §5.3) не может быть фундаментальной группой гомологической четырёхмерной сферы.

Известно, что в размерности 4 всякая суперсовершенная конечно определённая группа дефекта 0 реализуема [26]. В частности, группы Хигмана реализуемы. Кроме того, всякая реализуемая группа в размерности 3 реализуема и в размерности 4 [42]. Действительно, из гомологической трёхмерной сферы Σ^3 можно построить гомологическую четырёхмерную сферу Σ^4 следующим образом. Пусть связная сумма $\Sigma^3 \sharp \Sigma^3$ ограничивает некоторое четырёхмерное многообразие с краем V^4. Взяв дубль V^4, мы получим гомологическую четырёхмерную сферу с фундаментальной группой $\pi = \pi_1(\Sigma^3)$. Это означает, что класс реализуемых групп в размерности 3 у́же класса реализуемых групп в размерности 4.

Здесь также имеется естественный

Вопрос 3 (J. Hausmann, Sh.Weinberger, 1985, [19])**.** *Существует ли гомологическая 4-мерная сфера с конечной фундаментальной группой, отличной от бинарной группы икосаэдра?*

§5 Гомологические конуса над дискретными группами

В теории групп имеется аналог конструкций конуса из топологии.

Определение 8 ([1])**.** Пусть группа G вкладывается в ацикличную группу CG. Будем называть группу CG *ацикличным групповым конусом* (или сокращённо: групповым конусом) над группой G.

Оказывается, для любой группы G существуют различные функториальные конструкции CG. Примеры таких конструкций будут приведены ниже.

5.1 Гомологический конус Кана-Тёрстона

В работе [24] Кана и Тёрстона для группы G её конус CG строится следующим образом. Обозначим через $G^{\mathbb{Q}}$ группу функций относительно операции поточечной суммы $\mathbb{Q} \to G$, которые имеют компактный носитель, то есть каждая такая функция принимает тождественное значение 1 вне некоторого конечного интервала. Группа гомеоморфизмов рациональных чисел с компактными носителями Homeo $\mathbb{Q}$ действует на группе $G^{\mathbb{Q}}$ композициями. Тогда определим алгебраический конус CG, как полупрямое произведение $G^{\mathbb{Q}} \rtimes \operatorname{Homeo}\mathbb{Q}$ с умножением

$$(b,a)(b',a') = (ba(b'),aa'),\ b,b' \in G^{\mathbb{Q}},\ a,a' \in \operatorname{Homeo}\mathbb{Q}.$$

Очевидно, что данная конструкция функториальна, и, кроме того, имеется вложение группы $G \hookrightarrow CG$ нормальным делителем: $g \mapsto (b_g, \mathrm{id}) \in CG$, где $b_g r = g$, если $r = 0$, и $b_g r = 0$, иначе.

Утверждение 7. *Группа CG из конструкции Кана-Тёрстона является ацикличной.*

Доказательство. Утверждение получается из результата Мозера [28] о том, что группа гомеоморфизмов прямой с компактными носителями ациклична, и спектральной последовательности Хохшильда-Серра, применённой к расширению $1 \to G^{\mathbb{Q}} \to G^{\mathbb{Q}} \rtimes \operatorname{Homeo}\mathbb{Q} \to \operatorname{Homeo}\mathbb{Q} \to 1$. □

Замечание. Обычно группа CG имеет несчётный порядок. Тем не менее, имеется подконус $C'G \subset CG$, имеющий ту же мощность, что и G за исключением случая конечной G, в котором группа $C'G$ будет счётной.

5.2 Алгебраическое замыкание группы

Определение 9. Расширение M группы B называется *митозисом* B, если существуют элементы s, d в M, такие, что

1. $M = \langle B, s, d\rangle$,

2. $b^d = bb^s$ для любого $b \in B$,

3. $[b', b^s] = 1$ для любых $b, b' \in B$.

Здесь $b^s := s^{-1}bs$.

Определим важный класс групп:

Определение 10. Группа M называется *митотической*, если она содержит митозис любой её подгруппы.

Митотические группы обладают очень важным свойством:

Теорема 12 ([1]). *Митотические группы ацикличны.*

Примером митотических групп могут служить алгебраически замкнутые группы.

Определение 11 ([1])**.** Группа G называется *алгебраически замкнутой*, если для любой конечной системы уравнений

$$f_i(g_1, ..., g_n, x_1, ..., x_m) = 1,\ i = 1, ..., k$$

(относительно переменных $x_1, ..., x_m$ и постоянных $g_1, ..., g_n \in G$), для которой существует решение в расширении группы G, существует также решение и в самой группе G.

Теорема 13 ([1])**.** *Алгебраическое замыкание любой группы существует и является митотической группой.*

Имеется следующий результат, важный для дальнейшего:

Теорема 14 (G. Baumslag, E. Dyer, A. Heller, 1977, [1])**.** *Существует эндофунктор $\mathcal{C}$ в категории групп и гомоморфизмов, сопоставляющий каждой группе G гомологический конус $\mathcal{C}G$ над ней. Если G является конечно порождённой на n образующих, то $\mathcal{C}G$ является конечно порождённой на $n+5$ образующих.*

5.3 Универсальная ацикличная группа

В работе [1], 1980, был поставлен вопрос о том, всякая ли конечно определённая группа вкладывается в ацикличную конечно определённую группу. Позднее положительный ответ на этот вопрос был дан в [2], 1983. Но перед тем, как привести доказательство данного результата, остановимся на обсуждении так называемых универсальных групп Хигмана.

Как показано в работе [23] Хигмана, существует конечно определённая группа U_0, содержащая все конечно порождённые рекурсивно перечислимые группы (т. е. группы, соотношения которых образуют рекурсивно перечислимое множество). В частности, группа U_0 содержит все конечно определённые группы. Это мотивирует следующее

Определение 12. Конечно определённая группа G называется *универсальной*, если она содержит все рекурсивно перечислимые конечно порождённые группы

Однако в работе [23] универсальная группа U_0 задаётся неявным образом.

В недавней работе [11] даётся явное описание конечно определённой группы U (возможно, неизоморфной группе U_0), содержащей все конечно определённые группы. В частности, группа U содержит группу U_0 и, следовательно, все рекурсивно перечислимые конечно порождённые группы, т. е. U также будет универсальной конечно определённой группой.

Теорема 15 (M. Chiodo, M. Hill, [11], 2016)**.** *Существует универсальная конечно определённая группа U с 8 образующими и 26 соотношениями.*

Схема доказательства. Предположим, что мы хотим вложить произвольную конечно определённую группу G. Для этого вложим сначала её в универсальную конечно порождённую группу Хигмана C на двух образующих (см. [21]). Дальше рассмотрим свободное произведение $K_1 = C \star H$ для некоторой конечно определённой группы H (мы не останавливаемся на её определении, см. подробности в [11]). Рассматривается некоторая последовательность HNN-расширений

$$K_1 \rightsquigarrow K_2 \rightsquigarrow K_3 \rightsquigarrow K_4.$$

Дальше замечается, что соотношения в группе C (которых бесконечное множество) автоматически выполняются в группе K_4. В результате, получается, что K_4 имеет 13 образующих и 33 соотношения: 2 образующие берутся из группы Хигмана C; 7 образующих и 14 соотношений — из группы H; 4 образующие и 19 соотношений берутся из последовательности трёх HNN-расширений $C \star H \rightsquigarrow K_4$. Затем применяется некоторое наблюдение, позволяющее сократить число образующих и соотношений до 8 и 26 соответственно.

$\square$

Интересным представляется вопрос о единственности (с точностью до изоморфизма) универсальной группы Хигмана. Если U_1 и U_2 — две такие группы, то мы имеем вложения $U_1 \hookrightarrow U_2$ и $U_2 \hookrightarrow U_1$. Однако это не означает, что $U_1 \cong U_2$. Действительно, рассмотрим, например, свободные группы F_p и F_q различных рангов $p, q \geqslant 2$. Они вкладываются друг в друга, поскольку каждая из них содержит свободную группу со счётным числом образующих — коммутант, однако F_p не изоморфно F_q (т. к. эти группы имеют неизоморфные абеленизации).

Теорема 16 ([2], 1983)**.** *Существует ацикличная конечно определённая группа, содержащая изоморфные копии всех конечно определённых групп.*

Доказательство. Пусть U — универсальная конечно определённая группа Хигмана, то есть такая, что она содержит все конечно определённые подгруппы. Но группу U можно вложить в конечно порождённую ацикличную группу $V := \mathcal{C}U$ с рекурсивно перечислимым представлением (определение функтора $\mathcal{C}$ см. в теореме 14). Вложим V в изоморфную копию $\overline{U}$ группы U при помощи изоморфизма $\overline{u} \mapsto u$ для каждого $u \in U$. Рассмотрим HNN-расширение

$$E = \left\langle \overline{U}, t \mid t\overline{u}t^{-1} = u,\ u \in U \right\rangle.$$

Подгруппа B группы E, являющаяся нормальным замыканием группы $\overline{U}$, является также возрастающим объединением ацикличных групп

$$V < t^{-1}Vt < t^{-2}Vt < ...$$

Это действительно так, поскольку $U \hookrightarrow V$ и $t\overline{U}t^{-1} = U$. Но копредел коммутирует с функтором гомологий в силу того, что в абелевой категории функтор копредела является точным. Следовательно, B ацикличная. Факторгруппа E/B является бесконечной циклической группой $\mathbb{Z}$. Короткой точной последовательности $1 \to B \to E \to \mathbb{Z} \to 1$ отвечает спектральная последовательность Хохшильда-Серра

$$H_p(\mathbb{Z}, H_q(B, \mathbb{Z})) \Rightarrow H_*(E, \mathbb{Z}).$$

Она вырождается во втором члене, и поэтому мы имеем изоморфизмы

$$H_1E \cong \mathbb{Z},\ H_nE = 0,\ n > 1.$$

Теперь возьмём свободное произведение группы E и любой конечно определённой ацикличной группы A вдоль бесконечной циклической подгруппы. В качестве A можно, например, взять группу Хигмана Hig_4. Ацикличность полученной группы $E \star_{\mathbb{Z}} \mathrm{Hig}_4$ очевидным образом следует из точной последовательности Майера-Виеториеса. Тогда для произвольной конечно определённой группы G композиция следующих вложений будет искомым вложением в ацикличную конечно определённую группу:

$$G \hookrightarrow U \hookrightarrow E \hookrightarrow E \star_{\mathbb{Z}} \mathrm{Hig}_4\,.$$

Первое вложение имеет место в силу основного свойства универсальной группы Хигмана, а второе и третье — в силу свойств амальгамы.

□

Эквивалентно, теорема говорит о том, что всякая конечно определённая группа вкладывается в универсальный групповой гомологический конус над ней, являющийся конечно определённой группой.

В силу того, что конечные группы вкладываются в универсальную группу Хигмана и свойств амальгам 4 и HNN-расширений 5, мы получаем

Следствие 16.1. *Существует конечно определённая группа с элементами конечного порядка.*

Заметим, что рассматривавшиеся выше ацикличные конечно определённые группы не имели элементов конечного порядка.

Также комбинация теоремы 16 с явной конструкцией универсальной группы U из [11] даёт

Следствие 16.2. *Всякая конечно определённая группа вкладывается в универсальную ацикличную группу $\mathfrak{U}$ с 12 образующими и 38 соотношениями.*

Доказательство. Из доказательства теоремы 16 искомая группа имеет копредставление
$$\langle \overline{U}, t \mid t\overline{u}t^{-1} = u, u \in U \rangle \star_{\mathbb{Z}} \mathrm{Hig}_4,$$
где U — универсальная группа из теоремы 15.

Для копредставления группы E мы имеем $8+1 = 9$ образующих и $26+8 = 34$ соотношений. Для копредставления искомой группы тогда мы имеем $9 + 3 = 12$ образующих и $34 + 4 = 38$ соотношений, поскольку группа Hig_4 имеет 4 образующих и 4 соотношения. □

§6 Функторы типа Кана-Тёрстона

Д. Кан и У. Тёрстон получили следующий результат:

Теорема 17 (D. Kan, W. Thurston, 1976, [24])**.** *Для любого линейно связного симплициального множества $X \in \mathbf{sSet}_*$ с отмеченной точкой существует отображение (расслоение Серра)*
$$t : TX \to X,$$
естественное по X и обладающее следующими свойствами.

(*i*) *Естественное преобразование функторов $t : T \to \mathrm{Id}$ индуцирует изоморфизм групп сингулярных гомологий и когомологий с коэффициентами в произвольной локальной системе $\mathcal{A}$ на X, т. е.*
$$H_*(TX; t^*\mathcal{A}) \cong H_*(X; \mathcal{A}), \;\; H^*(TX; t^*\mathcal{A}) \cong H^*(X; \mathcal{A}).$$

(*ii*) *Пространство TX асферично, т. е. $TX \simeq K(G_X, 1)$, и отображение $t_*\pi_1 : G_X \to \pi_1 X$ — эпиморфизм.*

(*iii*) *Ядро P_X отображения $t_*\pi_1$ является совершенной нормальной подгруппой в G_X.*

(*iv*) *Гомотопический тип пространства X полностью определяется парой групп (G_X, P_X). А именно, пространство X может быть получено с* *точностью до гомотопии применением к пространству $K(G_X, 1)$ функтора $(-)^+$ плюс-конструкции Квиллена относительно совершенной нормальной подгруппы P_X. Эквивалентно, X может быть получено применением функтора послойного $\mathbb{Z}$-пополнения Боусфилда и Кана (см. [6]) к расслоению Серра $K(G_X, 1) \to K(G_X/P_X, 1)$.*

(v) *Универсальное накрытие $\widetilde{X}$ над X может быть получено с точностью до гомотопии применением функтора $\mathbb{Z}$-пополнения к $K(P_X, 1)$.*

(vi) *Ацикличный слой расслоения Серра $TX \to X$ получается с точностью до гомотопии применением функтора Дрора (см. [15]) к $K(P_X, 1)$.*

Дадим следующее

Определение 13. Эндофунктор T из условия теоремы 17 будем называть функтором *типа Кана-Тёрстона.*

Построение функтора T и отображения t в оригинальной работе Д. Кана и У. Тёрстона осуществляется при помощи техники симплициальных множеств. В силу того, что существуют различные конструкции функтора T (см. ниже), мы не будем приводить здесь явное описание T и доказывать первый пункт теоремы. Однако приведём доказательства последних четырёх пунктов, поскольку они выполняются для всех функторов типа Кана-Тёрстона T — при их доказательстве не используется явная конструкция функтора T. Приведение здесь доказательств также мотивируется тем, что в оригинальной статье Кана-Тёрстона они опущены и оставлены в качестве задач читателю. В доказательстве мы будем опираться на работу Боусфилда и Кана [6], в которой подробно определяется операция R-пополнения для коммутативных колец R и обсуждаются её свойства. За основными свойствами функтора Дрора отсылаем читателя к §4.1 или к оригинальной статье [15].

Доказательство. (iii). Для точной последовательности

$$1 \to P_X \to G_X \to \pi_1 X \to 1$$

имеет место спектральная последовательность Хохшильда-Серра

$$H_p(\pi_1 X; H_q(P_X; \mathbb{Z})) \to H_{p+q}(\pi_1 X; \mathbb{Z}),$$

где $\mathbb{Z}$ — тривиальный $\pi_1 X$-модуль.

Запишем точную пятичленную последовательность

$$H_2(\pi_1 X) \to E^2_{2,0} \xrightarrow{d_2} E^2_{0,1} \to H_1(\pi_1 X) \to E^2_{1,0} \to 0.$$

Имеем: $E^2_{2,0} = H_2(\pi_1 X)$. Далее,

$$E^2_{0,1} = H_0(\pi_1 X; H_1(P_X)) = H_1(P_X)_{\pi_1 X} = H_1(P_X),$$

поскольку индуцированное действие $\pi_1 X$ на $\ker(G_X \to \pi_1 X)$ тривиально. Наконец,

$$E^2_{1,0} = H_1(\pi_1 X; H_0(P_X)) = H_1(\pi_1 X).$$

Из первого свойства функтора Кана-Тёрстона следует, что $H_2(G_X) \cong H_2(X)$, $H_1(G) \cong H_1(X)$. Кроме того, $H_1(\pi_1 X) \cong H_1(X)$ (постоянные коэффициенты в $\mathbb{Z}$). Стало быть, мы получаем

$$H_2(X) \twoheadrightarrow H_2(\pi_1 X) \xrightarrow{0} H_1(P_X) \xrightarrow{0} H_1(G_X) \xrightarrow{\cong} H_1(X) \to 0.$$

Стрелка слева является эпиморфизмом в силу теоремы Хопфа. Значит, в силу сказанного выше, мы получаем, что $H_1(G_X) = 0$.

(iv). Покажем, что плюс-конструкция Квиллена (см. краткое напоминание её свойств в §6.1) однозначно с точностью до гомотопической эквивалентности, восстанавливает X по TX и совершенной нормальной подгруппе P_X в $G_X = \pi_1(TX)$. Применим функтор Квиллена к отображению $t : TX \to X$, и мы получим отображение

$$t^+ : (TX, P_X)^+ \to X.$$

Легко видеть, что отображение t^+ будет индуцировать изоморфизм на фундаментальных группах. Кроме того, по свойству плюс-конструкции мы будем также иметь и изоморфизм в любой системе локальных коэффициентов $\mathcal{A}$. Значит, по теореме Уайтхеда 6 для неодносвязных пространств мы получаем, что f — гомотопическая эквивалентность.

Применив послойный функтор $\mathbb{Z}$-пополнения $\dot{\mathbb{Z}}_\infty$ к расслоению Серра $TX \to X$, мы получим отображение

$$f : \dot{\mathbb{Z}}_\infty TX \to X.$$

Покажем, что f индуцирует гомотопическую эквивалентность. Для этого мы воспользуемся теоремой Уайтхеда 6 для неодносвязного случая. Из рассмотрения точной последовательности расслоения

$$\mathbb{Z}_\infty K(P_X, 1) \to \dot{\mathbb{Z}}_\infty K(G_X, 1) \to K(\pi_1 X, 1),$$

берущегося из основного свойства функтора послойного $\mathbb{Z}$-пополнения, получается, что f индуцирует изоморфизм на фундаментальных группах

$$f_* : \pi_1(\dot{\mathbb{Z}}_\infty K(G_X, 1)) \cong \pi_1(X),$$

поскольку $\pi_1(\mathbb{Z}_\infty K(P_X, 1)) = 1$, см. [6].

Рассмотрим морфизм расслоений Серра

$$\begin{tikzcd} K(P_X,1) \arrow[r, "i"] \arrow[d] & K(G_X,1) \arrow[r, "t"] \arrow[d] & K(\pi_1 X,1) \arrow[d, equal] \\ \mathbb{Z}_\infty K(P_X,1) \arrow[r] & \dot{\mathbb{Z}}_\infty K(G,1) \arrow[r] & K(\pi_1 X,1) \end{tikzcd}$$

Этот морфизм индуцирует морфизм спектральных последовательностей Лере. Для доказательства того, что f индуцирует изоморфизм в когомологиях с локальными коэффициентами, достаточно в силу теоремы Зимана показать, что для любой локальной системы $\mathcal{A}$ на X

$$H_*(K(P_X, 1); i^* \circ t^* \mathcal{A}) \cong H_*(\mathbb{Z}_\infty K(P_X, 1); \mathbb{Z}_\infty i^* \circ \mathbb{Z}_\infty t^* \mathcal{A}),$$

где $i^* \circ t^*$ и $\mathbb{Z}_\infty i^* \circ \mathbb{Z}_\infty t^*$ являются композициями гомоморфизмов фундаментальных групп в данных расслоениях. Заметим, что эти композиции гомоморфизмов тривиальны, поэтому участвующие коэффициенты получаются тривиальными. Но

$$H_*(\mathbb{Z}_\infty K(P_X, 1); \mathbb{Z}) \cong H_*(K(P_X, 1); \mathbb{Z}),$$

поскольку пространство $K(P_X, 1)$ является $\mathbb{Z}$-хорошим в терминах работы Боусфилда и Кана. Последнее верно в силу совершенности группы P_X.

(v). Этот пункт следует из предыдущего и точной последовательности расслоения

$$\mathbb{Z}_\infty K(P_X, 1) \to \dot{\mathbb{Z}}_\infty K(G_X, 1) \simeq X \to K(\pi_1 X, 1).$$

(vi). Мы имеем отображение $f : UX \to K(P_X, 1)$, где UX является гомотопическим слоем расслоения Серра $TX \to X$. Применяя к f функтор Дрора A и учитывая, что UX ациклично (это следует из спектральной последовательности Лере для данного расслоения и того, что TX и X имеют одинаковые гомологии), мы получаем отображение

$$Af : UX \to AK(P_X, 1).$$

Очевидно, Af индуцирует изоморфизм в гомологиях между полученными ациклычными пространствами. Из свойства функтора Дрора следует, что $\pi_1(AK(P_X, 1)) = \pi_1(AP_1K(P_X, 1)) = N$, где $P_1(P_X)$ — первый этаж системы Постникова пространства $K(P_X, 1)$, а N — максимальная совершенная подгруппа в группе P_X, т. е. $N = P_X$. Кроме того, $\pi_1(UX) \cong P_X$ из точной последовательности расслоения выше. Значит, f индуцирует изоморфизм и на фундаментальных группах. Дальнейшее следует из теоремы Уайтхеда.

$\square$

6.1 Эквивалентность категорий

Напомним здесь вкратце плюс-конструкцию Квиллена. Она позволяет по данному комплексу X и данной совершенной нормальной подгруппе P фундаментальной группы $\pi_1(X)$ строить комплекс X^+ с теми же гомологиями и с убитой подгруппой P в фундаментальной группе.

А именно, существует пространство X^+ и отображение $i : X \to X^+$, для которых

i) имеет место точная последовательность

$$1 \to P \to \pi_1(X) \xrightarrow{i_\star} \pi_1(X^+) \to 1;$$

ii) если группа $\pi_1(X^+)$ действует на коммутативной группе A, то для локальной системы $\mathcal{A}$ над X^+ и индуцированной системы $\mathcal{A}^*$ над X гомоморфизм $i^* : H^*(X^+; \mathcal{A}) \to H^*(X; \mathcal{A}^*)$ является изоморфизмом.

Из теоремы 17 следует, что исходное пространство X может быть восстановлено с точностью до гомотопии из пары (G_X, P_X) при помощи плюс-конструкции Квиллена, где $G_X = \pi_1(TX)$, $P_X = \ker \pi_1 tX$ — нормальная совершенная подгруппа G_X, т. е. $X = (G_X, P_X)^+$. Иными словами, конструкция Кана-Тёрстона в некотором смысле обратна плюс-конструкции Квиллена.

Следствие 17.1 (D. Kan, W. Thurston, [24]). *Имеет место эквивалентность категорий*

$$\mathrm{Ho}\,\mathscr{CW} \cong \mathscr{GP}[\Gamma^{-1}]$$

Здесь категория $\mathrm{Ho}\,\mathscr{CW}$ *состоит из* CW*-комплексов и классов гомотопий отображений между пространствами. Объектами категории* $\mathscr{GP}$ *служат пары дискретных групп* (G, P)*, где* P *— совершенная нормальная подгруппа* G*, отображения — гомоморфизмы* $f : (G, P) \to (G', P')$*, для которых* $f(P) \subset P'$*,* Γ *состоит из тех морфизмов* $f : (G, P) \to (G', P')$ *из* $\mathrm{Mor}(\mathscr{GP})$*, что* $f : G/P \cong G'/P'$ *и* $f_* : H_*(G; A) \cong H_*(G'; A)$ *для любого* G'/P'*-модуля* A*.*

Схема доказательства [14]. Имеется следующая диаграмма категорий и функторов между ними:

$$\mathrm{Ho}\,\mathscr{CW} \underset{\mathrm{Ho}()^+}{\overset{\mathrm{Ho}\,J}{\rightleftarrows}} \mathrm{Ho}\,\mathscr{XP} \xleftarrow{\mathrm{Ho}} \mathscr{XP} \underset{I}{\overset{T}{\rightleftarrows}} \mathscr{AP} \xrightarrow{\mathrm{Ho}} \mathrm{Ho}\,\mathscr{AP} \underset{B}{\overset{\pi}{\rightleftarrows}} \mathscr{GP}$$

Здесь

- $\mathscr{X}\mathscr{P}$ — категория пар (X, P), $P \lhd \pi_1(X)$, P совершенна
- $\mathscr{A}\mathscr{P}$ категория пар (X, P), $P \lhd \pi_1(X)$, X асферично, P совершенна
- $\mathscr{G}\mathscr{P}$ — категория пар (G, P), $P \lhd G$, P совершенна

Переходом к подходящим локализациям можно добиться того, чтобы все стрелки в диаграмме стали обратимыми, и тогда мы получим цепочку эквивалентностей категорий, из которой будет следовать требуемое. □

6.2 Функтор Маундера

Изложим здесь довольно простую конструкцию функтора Кана-Тёрстона, найденную Маундером в [29], 1981.

Теорема 18 (Д. Кан, У. Тёрстон, 1976, [24])**.** *Для каждого линейно связного пространства X с отмеченной точкой существует пространство TX и отображение*

$$TX \xrightarrow{t} X,$$

естественное по X и обладающее свойствами:

1. *Отображение t индуцирует изоморфизм в (сингулярных) гомологиях и когомологиях*

$$H_\bullet(TX; t^*\mathcal{A}) \cong H_\bullet(X; \mathcal{A})$$

для любой локальной системы коэффициентов $\mathcal{A}$ на X;

2. *$\pi_i(TX)$ тривиальна для $i \neq 1$, и отображение на фундаментальных группах $\pi_1 t$ — эпиморфизм;*

3. *Если исходным пространством был конечный симплициальный комплекс X, то TX может быть выбрано конечным.*

В доказательстве этой теоремы имеется две конструкции функтора T. Первая конструкция идейно повторяет рассуждения Кана и Тёрстона, но на уровне категории **Top**, а не **sSet** (эти категории эквивалентны). Вторая конструкция является модификацией первой и позволяет при помощи теоремы 19 (см. доказательство ниже) из работы [1] строить по конечным комплексам K конечные асферичные комплексы TK. Для дальнейших ссылок будем называть первую конструкцию *конструкцией Маундера*, а вторую конструкцию — *уточнённой конструкцией Маундера*.

Доказательство (C. R. F. Maunder, 1981, [29]). **Первый вариант конструкции Маундера (для всех симплициальных комплексов)**. Сначала докажем утверждение для конечных симплициальных комплексов индукцией по числу симплексов. Пусть для любого комплекса L с не более, чем $N-1$ симплексами отображение $t : TL \to L$ удовлетворяет пунктам теоремы. Предположим также, что на подкомплексах $M \subset L, TM = t^{-1}M$, и $\pi_1(TM) \to \pi_1(TL)$ является инъекцией. Поскольку всякий 1-мерный комплекс является пространством типа $K(\pi, 1)$, то отображение t может быть выбрано тождественным, если $\dim L \leqslant 1$.

Пусть теперь K получается из L приклеиванием n-симплекса σ к $\partial\sigma \subset L$, где $\dim \sigma \geqslant 2$. Тогда $T(\partial\sigma)$ является подпространством TL, и если $f : \sigma \to \Delta^n$ — симплициальный гомеоморфизм на стандартный n-симплекс, то отображение $Tf : T(\partial\sigma) \to T(\partial\Delta^n)$ является гомеоморфизмом. Кроме того, $T(\partial\Delta^n)$ является пространством типа $K(\pi, 1)$ по предположению индукции.

Вложение группы π в ацикличное пространство $C\pi$ индуцирует отображение классифицирующих пространств $g : T(\partial\Delta^n) \to K(C\pi, 1)$.

Тогда можно приклеить цилиндр отображения $g \circ Tf$ вдоль $T(\partial\sigma)$ к TL, а отображение t можно продолжить до отображения $t : TK \to K$, отправляя $K(C\pi, 1)$ в барицентр симплекса σ.

Проверим теперь, что отображение $t : TK \to K$ — искомое:

1. Рассмотрим две точные последовательности Майера-Виеториса для пространства
$$TK = \mathrm{Cyl}(g \circ Tf) \sqcup_{T(\partial\sigma)} TL$$
и для пространства
$$K = \sigma \sqcup_{\partial\sigma} L.$$
Тогда по предположению индукции и по 5-лемме мы будем иметь изоморфизм $H_n(TK; A) \cong H_n(K; A)$.

2. Склеиваемые пространства являются асферичными и склейка происходит вдоль асферичного пространства, также в фундаментальные группы пространств TL и $K(C\pi, 1)$ вкладывается группа π, поэтому по теореме Уайтхеда пространство $TK = \mathrm{Cyl}(g \circ Tf) \sqcup_{T(\partial\sigma)} TL$ будет иметь тип $K(\pi_1(TK), 1)$, где $\pi_1(TK) = \pi_1(TL) \star_\pi C\pi$. Кроме того, отображение $t_\star : \pi_1(TK) \to \pi_1(K)$ является эпиморфизмом, поскольку $\pi_1(K) = \pi_1(L) \star_{\pi_1(\partial\sigma)} \pi_1(\sigma)$ и в силу предположения индукции.

Заметим, что конструкция пространства TK является естественной относительно симплициальных отображений, сохраняющих строгий порядок. Таким образом, для конечных симплициальных комплексов теорема доказана. Беря копредел по конечным подкомплексам, можно получить результат для бесконечных сиплициальных комплексов.

В общем случае, если X — произвольное линейно связное пространство, мы можем положить

$$TX = T(|SX|''),$$

где SX — сингулярный комплекс, рассматриваемый, как симплициальное множество, $|\cdot|$ — реализация симплициального множества, а двойной штрих — второе барицентрическое подразделение. Эта конструкция также является естественной.

Второй вариант конструкции Маундера (для конечных симплициальных комплексов). Докажем последний пункт теоремы. Пусть изначально X было конечным симплициальным комплексом.

Будем строить индукцией по размерности и числу клеток пару конечных симплициальных пространств (UK, TK) и отображение пар $t : (UK, TK) \to (CK, K)$, где CK — конус над K, такое, что ограничение t на TK является искомым отображением. Предположим, что мы уже построили $t : (UL, TL) \to (CL, L)$, такое, что

(i) (UL, TL) является конечной симплициальной парой, $\dim UL = n + 1$, $\dim TL = n$;

(ii) Для любого связного r-мерного подкомплекса M комплекса L выполнено: $t^{-1}(CM)$ и $t^{-1}(M)$ являются $(r+1)$- и r-мерными подкомплексами UL и TL соответственно, ограничения $t : t^{-1}(CM) \to CM$, $t : t^{-1}(M) \to M$ удовлетворяют первым двум условиям теоремы. Более того, пусть $\pi_1 t^{-1}(CM) \to \pi_1 UL$, $\pi_1 t^{-1}(M) \to \pi_1 TL$ и $\pi_1 t^{-1}(M) \to \pi_1 t^{-1}(CM)$ являются инъекциями.

База индукции — нульмерный остов. На нём полагаем t тождественным отображением, $UL = CL$. Теперь пусть K получен приклейкой симплекса σ, размерности $n \geqslant 1$. Тогда по предположению индукции $t^{-1}(C\partial\sigma)$ и $t^{-1}(\partial\sigma)$ являются подкомплексами UL и TL соответственно. Пусть TK получается из TL приклейкой копии $t^{-1}(C\partial\sigma)$ вдоль $t^{-1}(\partial\sigma)$. Продолжение $t : TK \to K$ будет отправлять $t^{-1}(C\partial\sigma)$ в $C\partial\sigma$, причём $C\partial\sigma$ отождествляется с σ так, что вершина симплекса $C\partial\sigma$ идёт в барицентр $\hat{\sigma}$ симплекса σ (а дальше отображение продолжается по линейности). Для построения UK рассмотрим комплекс

$$X = t^{-1}(C\partial\sigma) \sqcup_{t^{-1}(\partial\sigma)} t^{-1}(C\partial\sigma).$$

Тогда X будет пространством типа $K(\pi, 1)$, где $\pi = G \star_F G$, $G = \pi_1(t^{-1}(C\partial\sigma))$ и ясно, что $\dim X = \dim \sigma = n$. Рассмотрим следующее образование:

$$UK := (UL \cup TK) \sqcup_X \mathrm{Cyl},$$

где Cyl — это цилиндр отображения $X = K(G \star_F G, 1) \to K((A \times F) \star_F G, 1)$, в котором A — нетривиальная геометрически конечная ацикличная группа с $\dim K(A, 1) = 2$ (например, группа Хигмана Hig_4). Группа $(A \times F) \star_F G$ является ацикличной согласно следующей теореме:

Теорема 19 ([1])**.** *Пусть имеется вложение $F \to G$, где G — ацикличная. Тогда амальгама $G \star_F G$ вкладывается в ацикличную группу*

$$(A \times F) \star_F G$$

где A — любая нетривиальная ацикличная группа.

Отображение t продолжается на UK отправлением $K((A \times F) \star_F G, 1)$ в барицентр конуса $C\sigma$. Если $\dim \sigma = 1$, нужно вместо $G \star_F G$ взять группу $\mathbb{Z}$, которая должна вкладываться в A вместо $(A \times F) \star_F G$.

Пространство $K((A \times F) \star_F G, 1)$ является ацикличным относительно системы коэффициентов $t^*\mathcal{A}$, поскольку последняя тривиальна. Действительно, она получается из системы $\mathcal{A}$ на X pullback'ом вдоль отображения $t : t^{-1}(C\partial\sigma) \to C\partial\sigma$, но конус $C\partial\sigma$ стягиваем, и значит, система $\mathcal{A}$ на нём тривиальна.

Таким образом, получается, что $\dim K((A \times F) \star_F G, 1) = n + 1$.

Заметим, что на каждом шаге цилиндры отображения можно представить в виде симплициального разбиения, поэтому мы получаем конечный симплициальный комплекс с требеумыми свойствами. Эта конструкция также естественна по пространству X.

□

6.2.1 Пример: уточнённая конструкция Маундера для двумерного симплекса

Приведём здесь пошаговое построение результата применения функтора Маундера к двумерному симплексу Δ^2.

Шаг 0. Сначала мы имели нульмерный остов, состоящий из 3 вершин $L = \{[0], [1], [2]\}$. В этом случае конус является объединением трёх отрезков: $CL = \{[3, 0], [3, 1], [3, 2]\}$. Конструкция Кана-Тёрстона TL совпадёт с L и пространство UL совпадёт с CL. Отображение пар $t : (UL, TL) \to (CL, L)$ будет тождественным, см. рис. 4.

Рис. 4

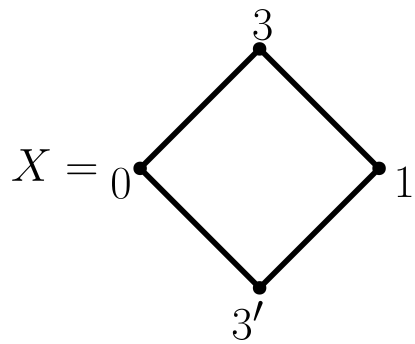


Рис. 5

Шаг 1. Приклеим 1-симплекс $\sigma = [0,1]$ к комплексу L и получим комплекс K. Тогда $C\partial\sigma$ будет «рогом» $[3,0] \cup [3,1]$, $t^{-1}(C\partial\sigma) = [3,0] \cup [3,1]$, и $t^{-1}(\partial\sigma) = [0] \cup [1]$. Значит, $TK = TL \sqcup_{t^{-1}(\partial\sigma)} t^{-1}(C\partial\sigma) = [3',0] \cup [3',1] \cup [2]$ — это объединение двух отрезков и точки, причём при отображении $t : TK \to K$ вершина $[3']$ отображается в середину отрезка $[0,1]$.

Пространство $X = t^{-1}(C\partial\sigma) \sqcup_{t^{-1}(\partial\sigma)} t^{-1}(C\partial\sigma) = [3,0] \cup [3,1] \cup [3',0] \cup [3',1]$ — это окружность $K(\mathbb{Z},1)$, см. рис. 5.

Далее, мы должны приклеить объединение $UL \cup TK$ к пространству X, см. рис. 6.

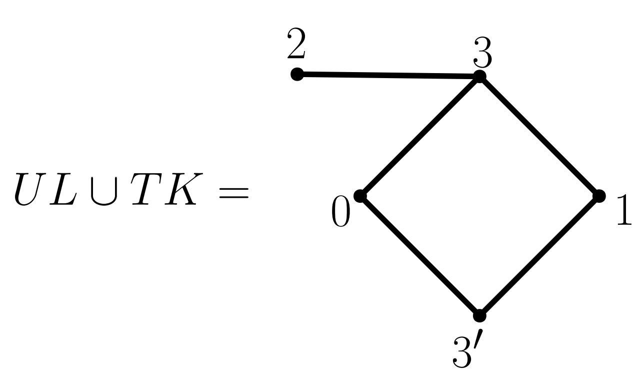


Рис. 6

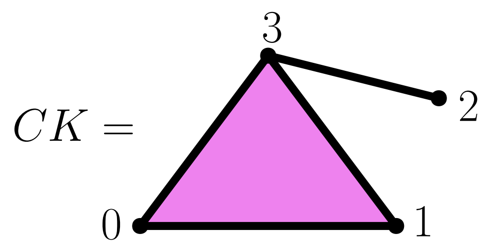


Рис. 7

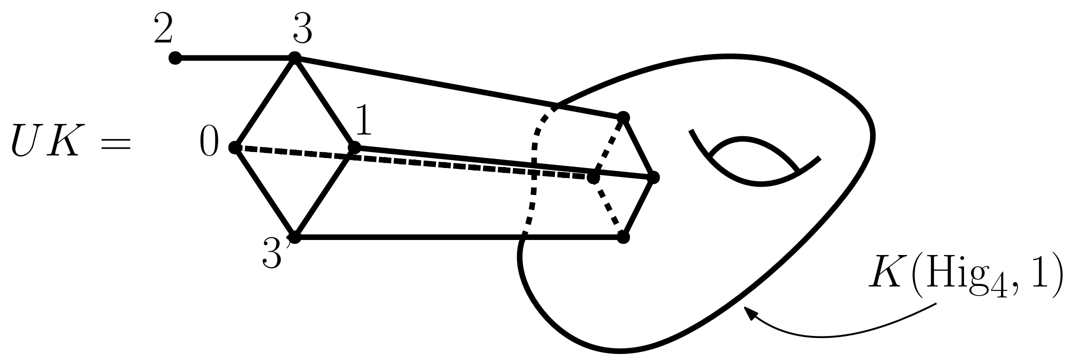


Рис. 8

Комплекс CK будет выглядеть, как на рис. 7.

Теперь нужно приклеить к пространству $UL \cup TK$ цилиндр отображения $X \simeq K(\mathbb{Z}, 1) \to K(\mathrm{Hig}_4, 1)$, и мы получим пространство UK.

Отображение $t : TK \to K$ будет переводить комплекс $K(\mathrm{Hig}_4, 1)$ в барицентр $[4]$ треугольника $[0, 3, 1]$. При этом грани «призмы», примыкающие к сторонам $[3, 0]$ и $[3, 1]$ отобразятся на треугольник $[4, 0, 1]$. Две другие грани «призмы», примыкающие к отрезкам $[0, 3]$ и $[3, 1]$ отобразятся на треугольники $[4, 0, 3]$ и $[4, 3, 1]$ соответсвенно, см. рис. 8.

Обозначим для удобства дальнейшего изложения получившееся образование за $A := UK$.

Шаг 2. Переобозначим полученную пару комплексов через (UL, TL) и будем приклеивать следующий 1-симплекс $[1, 2]$, см. рис. 9.

Пространство TK будет представлять собою $[0, 1] \cup [3'', 1] \cup [3'', 2]$ и будет отображаться в K, отправляя точку $3''$ в барицентр отрезка $[1, 2]$. В качестве пространства UK будет выступать объединение отрезка $[0, 1]$ и пространства с двумя склеенными копиями A, причём вторая копия A будет подклеиваться к «рогу» $[3, 2] \cup [3, 1]$.

Шаг 3. Приклеим третье ребро $[0, 2]$. В результате, к UL подклеится ещё одна копия пространства типа A с прошлого шага, но уже к рогу $[3, 2] \cup [3, 0]$, так-

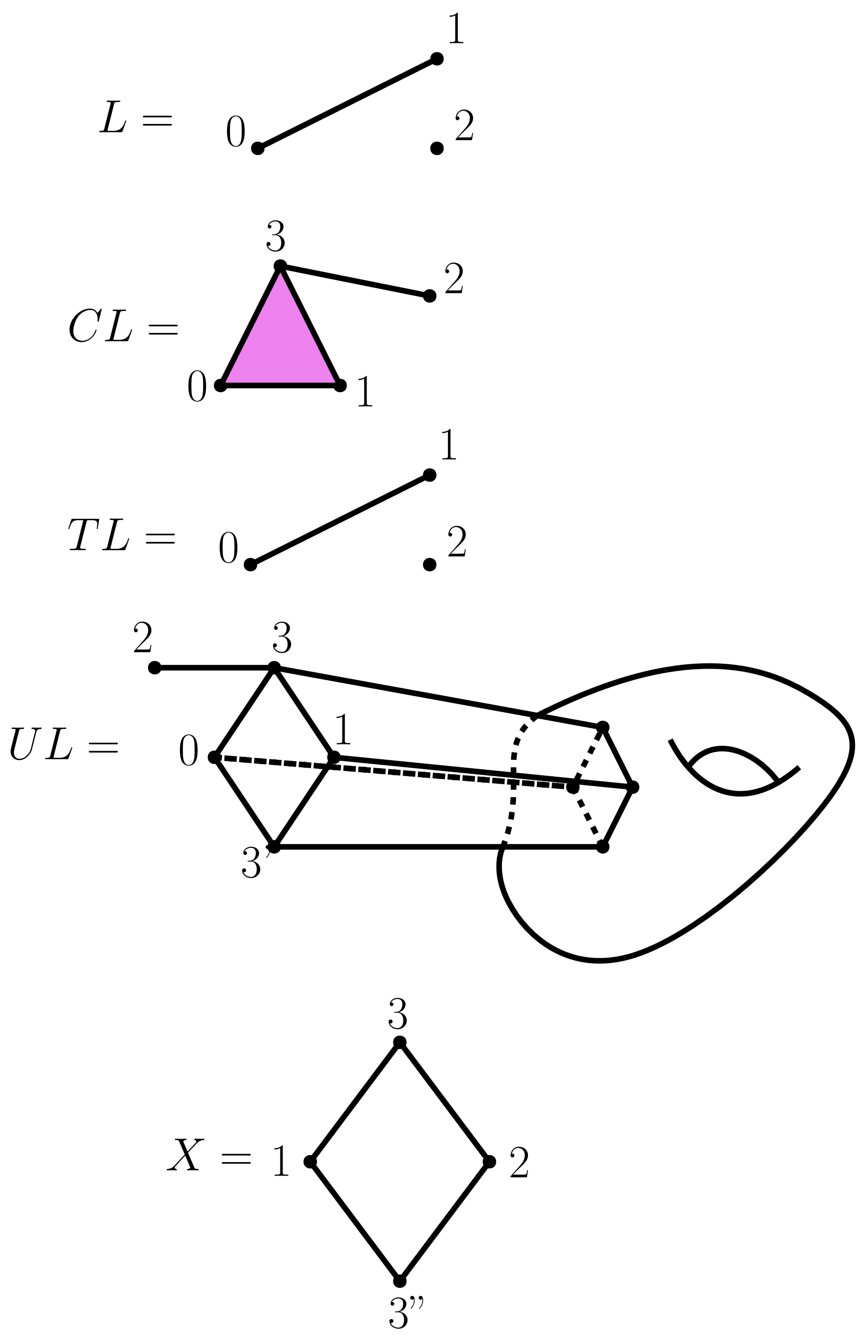


Рис. 9

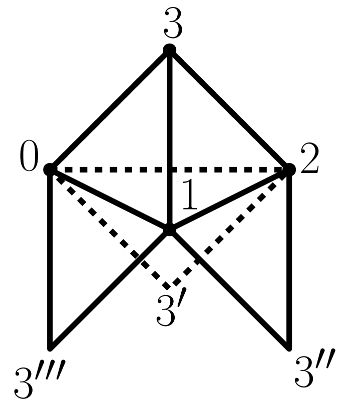


Рис. 10

же к UL подклеится отрезок $[1, 2]$. Пространство Кана-Тёрстона будет $[0, 1] \cup [1, 2] \cup [3''', 2] \cup [3''', 0]$ — окружность.

Шаг 4. Подклейка двумерной клетки к границе треугольника. Комплекс $T\Delta^2$ будет представлять собой три образования типа A, склеенных вдоль трёх рогов с общей вершиной $[3]$ и остальными вершинами $[0], [1], [2]$. См. схему расположения «рогов» на рис. 10.

Как устроено отображение $t : TK \to K$? Конус над границей треугольника $[0, 1, 2]$ с вершиной $[3]$ переходит в треугольник $[0, 1, 2]$ так, что вершина $[3]$ отображается в барицентр треугольника $[0, 1, 2]$, а остальные вершины конуса переходят тождественно в вершины этого треугольника. На другие точки этого конуса отображение t продолжается по линейности. На каждом из трёх подклееных цилиндров отображение t уже задано.

Полученное пространство $T\Delta^2$ имеет в качестве фундаментальной группы свободное произведение трёх групп Хигмана Hig_4. То есть для стягиваемых пространств конструкция Маундера даёт нестягиваемые ацикличные пространства. Это наглядно иллюстрирует тот факт, что функтор Кана-Тёрстона не является гомотопическим.

Видно также, что уже для такого пространства, как двумерный симплекс, возникают трудности с явным построением его пространства Кана-Тёрстона уточнённым методом Маундера.

6.2.2 Группа $\mathfrak{U}$ и функтор Маундера

Как было видно из §6.2.1, с уточнённой конструкцией Маундера функтора T достаточно неудобно работать.

Из следствия 16.2 теоремы 16 получается, что в основной конструкции Маундера в качестве гомологического конуса будет годиться универсальная конечно определённая ацикличная группа $\mathfrak{U}$ (см. §5.3). В обозначениях этой конструкции $\pi_1(T\partial\sigma) = \pi$ вкладывается в $C\pi := \mathfrak{U}$ и затем к $T\partial\sigma$ приклеивается цилиндр отображения $T(\partial\sigma) \to K(\mathfrak{U}, 1)$. Однако если исходно мы имели конечный симплициальный комплекс X, то в результате получится бесконечномерный симплициальный комплекс TX с конечным числом клеток каждой размерности, поскольку группа $\mathfrak{U}$ имеет кручение (см. §5.3). Тем не менее, группа $\mathfrak{U}$ решает проблему вложения группы в её гомологический конус в общей конструкции Маундера.

6.2.3 Функтор Маундера для двумерных комплексов

В дальнейшем мы будем применять функтор T к полиэдральным разбиениям двумерных комплексов, поэтому в этом контексте мы будем использовать следующую конструкцию T. Рассмотрим общую конструкцию Маундера и в момент подклейки двумерного симплекса будем использовать в качестве гомологического конуса группы $\mathbb{Z}$ группу Хигмана Hig_4.

6.2.4 Проблема однозначности конструкции Маундера

Рассмотренные функторы T типа Кана-Тёрстона существенным образом зависят от симплициального разбиения исходного пространства X, а также от выбора групповых конусов. Пример уточнённой конструкции Маундера $T\Delta^2$ из §6.2.1 показывает, что T, вообще говоря, не является гомотопическим функтором. Однако это означает, что если зафиксировать выбор вложения в групповой конус (например, как это сделано в §6.2.2 для произвольных комплексов или в §6.2.3 для двумерных комплексов), то фундаментальная группа пространства TX будет некоторым образом характеризовать комбинаторику исходного симплициального комплекса X.

§7 Группы, свободно действующие на ацикличных пространствах

Рассмотренные выше функторы Дрора A и Кана-Тёрстона T дают надежду на обобщение понятия универсального расслоения. А именно, для данной группы G зададимся поиском ацикличного, но не стягиваемого пространства $\mathcal{E}G$, на котором дискретная группа G действует свободно.

Может показаться, что из естественности функтора Дрора может следовать то, что он переводит накрытия симплициальных множеств в накрытия или что композиция $A\widetilde{X} \to \widetilde{X} \to X$ является накрытием. Однако оба этих предположения неверны, поскольку имеет место следующее

Утверждение 8. *Если $\mathcal{E}G \to \mathcal{B}G$ — G-накрытие с гомологически тривиальным $\mathcal{E}G$, то $\mathcal{B}G$ имеет такие же гомологии с коэффициентами в тривиальном G-модуле $\mathbb{Z}$, как и BG — классифицирующее пространство группы G.*

Доказательство. Рассмотрим спектральную последовательность Картана-Лере

$$H_p(G; H_q(\mathcal{E}G)) \Rightarrow H_*(\mathcal{B}G).$$

Она вырождается во втором члене, поэтому

$$H_n(\mathcal{B}G) \cong H_n(G; H_0(\mathcal{E}G)) = H_n(G; \mathbb{Z}) = H_n(G).$$

Последнее равенство верно в силу тривиальности G-модуля $\mathbb{Z}$. □

Похожий естественный вопрос возникает и для функторов Кана-Тёрстона: существует ли такая конструкция функтора Кана-Тёрстона T, что если $\widetilde{X} \to X$ является G-накрытием, то $T\widetilde{X} \to TX$ тоже является G-накрытием. Оказывается, функтор Маундера, рассмотренный в §6.2, является искомым, то есть справедлива

Теорема 20. *Существует функтор типа Кана-Тёрстона, переводящий G-накрытия в G-накрытия.*

Доказательство. Пусть отображение симплициальных комплексов $Y \to X$ является G-накрытием, т. е. на пространстве Y задано свободное симплициальное действие дискретной группы G, такое, что в факторе Y/G получается пространство X. Покажем, что по действию $G \rightharpoondown Y$ можно построить действие G на конструкции Маундера пространства Кана-Тёрстона TY. Поскольку $\mathrm{sk}^1 TY = Y$, то на одномерном остове действие G уже задано. Предположим теперь, что мы подклеиваем к комплексу $L \subset Y$ некоторую клетку σ и мы смогли уже задать действие G на TL. Приклейке клетки σ соответсвует приклейка цилиндра $\mathrm{Cyl} = \mathrm{Cyl}\ (T(\partial\sigma) \to K(C\pi_1(T\partial\sigma), 1))$ к TL. Пусть элемент g переводит $T\partial\sigma$ в $T\partial\sigma'$. Тогда будем считать, что g переводит подклеивающийся цилиндр Cyl в его копию Cyl$'$, которая, в свою очередь, будет подклеиваться к $T\sigma'$. Таким образом можно продолжить действие с орбиты $T\sigma$ на подклеенные цилиндры и значит, в конечном счёте на всё пространство TY. □

Следствие 20.1. *Для любой дискретной группы G существует ацикличное нестягиваемое пространство $\mathcal{E}G$ со свободным действием группы G. Фактор-пространством по этому действию будет пространство $\mathcal{B}G$, гомологически эквивалентное классифицирующему пространству BG группы G.*

Доказательство. Достаточно применить теорему 20 к универсальному накрытию $\mathcal{E}G \to \mathcal{B}G$. Гомологическая эквивалентность $\mathcal{B}G$ и BG следует из утверждения 8. □

Рассмотрим категорию **Acyc**, объектами которой являются ацикличные G-пространства, а морфизмами — эквивариантные G-отображения.

Имеется следующий

Вопрос 4. *Существует ли конструкция функтора T, для которой объект $\mathcal{B}G$ был бы терминальным в категории* **Acyc***?*

§8 Полиэдры и конечно определённые группы

Предположим, что топологическое пространство X представлено в виде разбиения P на выпуклые многогранники, возможно, разных размерностей. Тогда функтор Маундера по фиксированному выбору ацикличных групп в его конструкции ставит в соответствие разбиению P асферичное пространство TP и, в частности, фундаментальную группу $\pi_1 TP$. Итак, для фиксированной конструкции функтора T, мы имеем соответствие

$$P \mapsto \pi_1 TP.$$

8.1 Конструкция TP для 3-полиэдров P

Для выпуклых трёхмерных многогранников P конструкцию можно уточнить:

- Для этого выберем в 1-остове P максимальное дерево (на рисунках будем обозначать его фиолетовым цветом).
- Оставшиеся рёбра будут тогда образующими фундаментальной группы 1-остова многогранника (на рисунках им будут отвечать красные рёбра).

Для дальнейшего нам понадобится

Определение 14. *Пунктированная конечно определённая группа* — группа с выделенной образующей.

- Рассмотрим f копий пунктированных групп Хигмана

$$\mathrm{Hig}_4^i = \langle a_i, b_i, c_i, d_i \mid ... \rangle,\ i = 1, ..., f$$

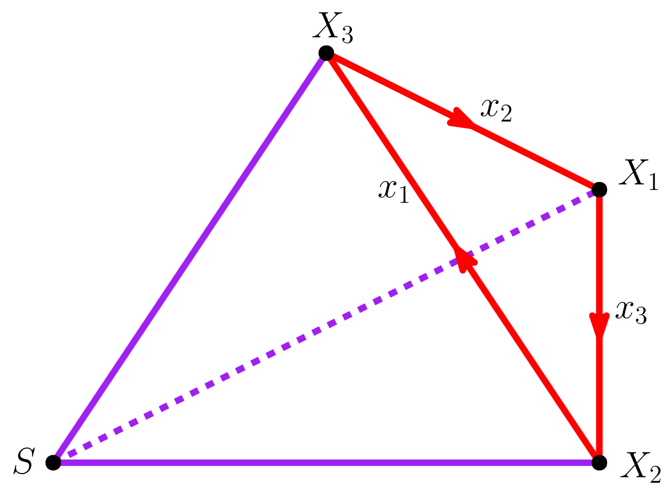


Рис. 11

где f — число граней многогранника P и в каждой группе Hig_4^i выбрана образующая a_i.

- Приклеим цилиндр отображения $\partial F_i \to K(\mathrm{Hig}_4^i, 1)$ к границе грани F_i в 1-остове P для каждой группы Хигмана Hig_4^i ($i = 1, ..., f$). Здесь ∂F_i представляет собой окружность, и она отождествляется с окружностью, соответствующей образующей a_i в группе Хигмана Hig_4^i. Подразбивая 1-остов в комплексе $K(\mathrm{Hig}_4, 1)$, если нужно, мы сможем реализовать нужные отождествления.

Пример 1. Найдём фундаментальную группу пространства TL, где L — минимальное симплициальное разбиение $\mathbb{S}^2$, отвечающее тетраэдру, см. рис. 11.

Рассмотрим 1-остов $\mathrm{sk}^1 L$ тетраэдра $SX_1X_2X_3$. Будем считать точку S отмеченной в этом комплексе. Обозначим через x_1, x_2 и x_3 классы гомотопий петель $S \to X_2 \to X_3 \to S$, $S \to X_3 \to X_1 \to S$ и $S \to X_1 \to X_2 \to S$ соответственно. Стягивая одномерный подкомплекс на вершинах S, X_1, X_2 и X_3, мы получаем, что фундаментальная группа 1-остова тетраэдра имеет следующее копредставление

$$\pi_1(\mathrm{sk}^1 L, S) = \langle x_1, x_2, x_3 \rangle,$$

т. е. является свободной группой F_3 ранга 3 на элементах x_1, x_2 и x_3.

Занумеруем грани тетраэдра так, что грань $X_1X_2X_3$ соответствует 4-й грани, а любая другая грань имеет номер j, если она примыкает к отмеченному буквой x_j ребру.

При подклеивании цилиндра f_4 к четвёртой грани слово $x_1x_2x_3$ в группе

$\pi_1(\mathrm{sk}^1 L, S)$ можно отождествить, например, с образующей a_4 группы Хигмана

$$\mathrm{Hig}_4 = \langle a_4, b_4, c_4, d_4 \mid a_4^{-1} b_4 a_4 = b_4^2,\ b_4^{-1} c_4 b_4 = c_4^2,\ c_4^{-1} d_4 c_4 = d_4^2,\ d_4^{-1} a_4 d_4 = a_4^2 \rangle.$$

После подклеивания цилиндра к грани $X_3 X_1 X_2$ фундаментальная группа будет иметь вид

$$F_3 \star_{\mathbb{Z}} \mathrm{Hig}_4 =$$

$$\langle x_1, x_2, x_3, a_4, b_4, c_4, d_4 \mid$$

$$a_4 = x_1 x_2 x_3, (a_4)^{-1} b_4 (a_4) = b_4^2,\ b_4^{-1} c_4 b_4 = c_4^2,\ c_4^{-1} d_4 c_4 = d_4^2,\ d_4^{-1} a_4 d_4 = a_4^2 \rangle.$$

Осталось ещё приклеить 3 цилиндра к оставшимся граням. Для первой грани мы будем иметь отождествление по слову x_1. Значит, при подклеивании нового цилиндра возникнет свободное произведение с изоморфной копией Hig_4 с отождествлением элемента x_1 вдоль элемента a_1. К имеющемуся копредставлению группы $F_3 \star_{\mathbb{Z}} \mathrm{Hig}_4$ добавятся образующие a_1, b_1, c_1, d_1 и соотношения из группы Хигмана на этих образующих, плюс соотношение склейки $x_1 = a_1$.

Рассуждая аналогичным образом для оставшихся граней, получаем, что фундаментальная группа комплекса TL будет иметь копредставление, в котором образующими будут a_i, b_i, c_i и d_i для $i = 1, 2, 3, 4$ и также x_j для $j = 1, 2, 3$. Первая группа образующих для каждого фиксированного i соответствует образующим группы Хигмана для i-й грани тетраэдра. Множество соотношений для данной группы будет являться объединением множеств соотношений для четырёх групп Хигмана Hig_4 и отождествлений вдоль произведений отмеченных рёбер каждой грани. Более конкретно, нужно объединить множество

$$\bigcup_{i=1}^{4} \{[b_i, a_i] = b_i,\ [c_i, b_i] = c_i,\ [d_i, c_i] = d_i,\ [a_i, d_i] = a_i\},$$

где $[x, y] = x^{-1} y^{-1} x y$, а также множество

$$\{x_1 x_2 x_3 = a_1,\ x_k = a_k,\ k = 1, 2, 3\}.$$

Итого, мы получаем группу с $4 \cdot 4 + 3 = 19$ образующими и $4 \cdot 4 + 1 + 3 = 20$ соотношениями.

Обозначим эйлерову характеристику трёхмерного полиэдра P через $\chi(P)$. Тогда для этого полиэдра $v - e + f = \chi(P)$, где v, e и f обозначают числа вершин, рёбер и граней P. Для 1-остова P получаем, что $\chi(\mathrm{sk}^1 P) = v - e = \chi(P) - f$. После стягивания в точку остовного дерева у 1-остова P мы будем иметь одну

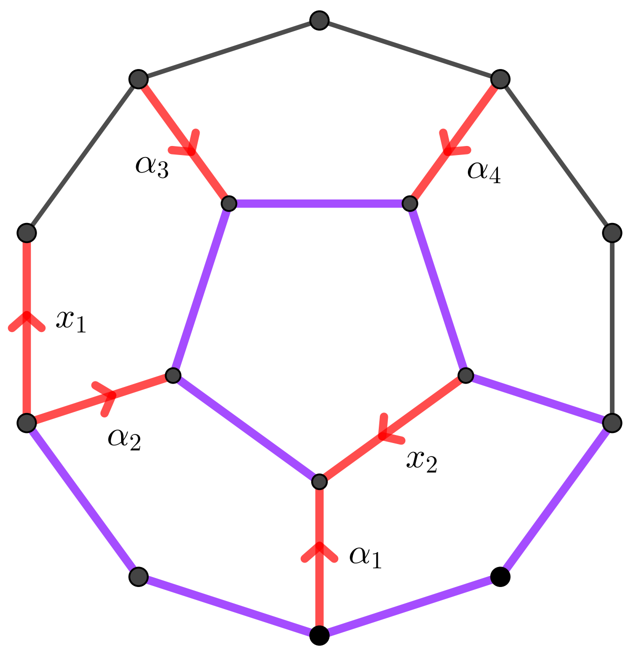


Рис. 12

вершину и e' рёбер, но ту же эйлерову характеристику $\chi(\mathrm{sk}^1 P)$. Откуда получаем, что $e' = f - \chi(P) + 1$ — число рёбер вне остовного дерева. Значит, копредставление фундаментальной группы пространства Кана-Тёрстона для данного комплекса будет иметь $e' + 4f = 5f - \chi(P) + 1$ порождающих и $f + 4f = 5f$ соотношений.

В частности, для многогранников $P \cong \mathbb{S}^2$ мы получим конечно определённую группу $\pi_1 TP$, имеющую $5f - 1$ образующих и $5f$ соотношений.

Пример 2. Рассмотрим замощение проективной плоскости шестью пятиугольниками, см. рис. 12.

На рисунке предполагается отождествление симметричных относительно центра сторон 10-угольника. Фиолетовым цветом выделено максимальное дерево 1-остова комплекса, которое предполагается стягивать. Красные отрезки являются образующими фундаментальной группы 1-остова. Фундаментальная группа соответствующего пространства Кана-Тёрстона имеет копредставление с образующими x_1, x_2, α_i, $i = 1, ..., 4$, a_j, b_j, c_j, d_j, $j = 1, ..., 6$. Нумерация групп Хигмана соответствует следующей нумерации граней. Пусть центральная грань имеет номер 6, а остальные грани занумерованы против часовой стрелки, начиная с грани с рёбрами x и α_1. Соотношения получаются объединением соотношений для шести групп Хигмана, а также соотношений, соответствующих склейке слов в каждой грани с образующими групп Хигмана:

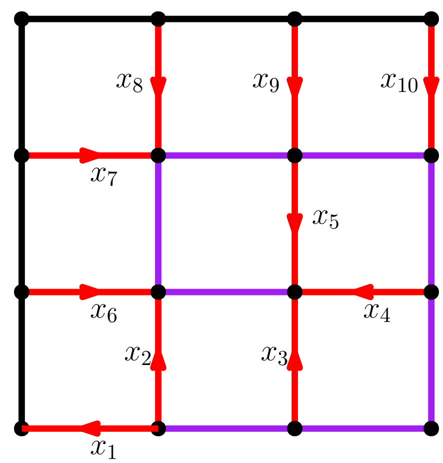


Рис. 13

- 5-пояс: $\alpha_1\alpha_2^{-1} = a_1$, $x_2\alpha_1^{-1} = a_2$, $\alpha_4 = a_5$, $x_1\alpha_4 = a_3$, $\alpha_3\alpha_4^{-1} = a_4$, $\alpha_2\alpha_3^{-1}x_1^{-1} = a_5$
- Центральная грань: $x^{-1} = a_6$

Итого, мы имеем $6 + 6 \cdot 4 = 30$ образующих и $4 \cdot 6 + 6 = 30$ соотношений.

Пример 3. Рассмотрим следующее разбиение тора на квадраты, см. рис. 13.

Здесь мы будем иметь $9 \cdot 4 + 10 = 46$ образующих: a_i, b_i, c_i, d_i $(i = 1, ..., 9)$, x_j $(j = 1, ..., 10)$ и $9 \cdot 4 + 9 = 45$ соотношений: соотношения из групп Хигмана, соотношения склейки при обходе квадратов разбиения.

8.2 Многогранники с гамильтоновыми путями

Предположим, что 1-остов трёхмерного многогранника P имеет гамильтонов путь γ. Опишем канонический способ задания группы $\pi_1 TP$ образующими и соотношениями:

1. Зафиксируем ориентированный гамильтонов путь γ в 1-остове P с нумерацией вершин. Оставшиеся рёбра будем называть красными.

2. Упорядочим лексикографически красные рёбра.

3. Зафиксируем ориентацию многогранника P.

4. Отметим по образующей a_i для каждой из f групп Хигмана Hig_4^i.

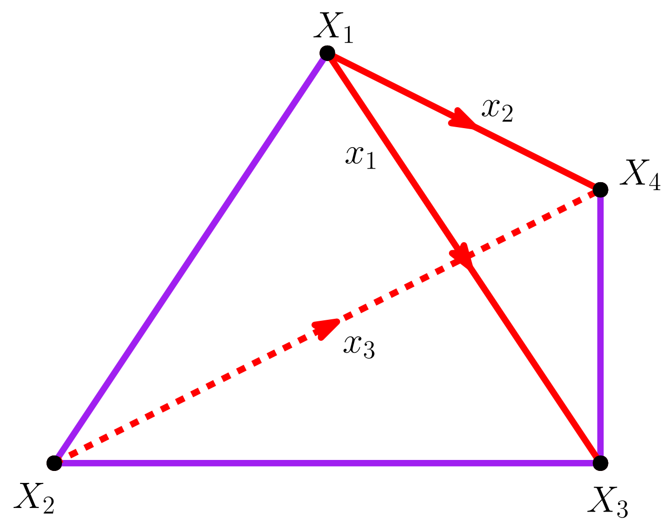


Рис. 14

5. Красные рёбра пометим символами x_i, где i является номером красного ребра в лексикографическом порядке.

6. Зададим нумерацию граней и запишем соотношения приклейки последовательно для каждой грани.

Пример 4. Рассмотрим снова тетраэдр, но теперь вместо произвольного дерева выберем гамильтонов путь (он показан фиолетовыми рёбрами), см. рис. 14.

Запишем соотношения приклейки: $\{x_1^{-1} = a_1,\ x_2^{-1}x_1 = a_2,\ x_3^{-1}x_2 = a_3, x_3 = a_4\}$

§9 Приложения к математической теории фуллеренов

Как было сказано во введении, в химии, физике и нанотехнологиях важной является задача классификации изомеров фуллеренов. В данном разделе описывается алгоритм, который строит по любому фуллерену P конечно определённую группу G_P.

Определение 15. *Математическим фуллереном* называется выпуклый простой трёхмерный многогранник, все двумерные грани которого являются пяти- и шестиугольниками.

Далее, для краткости будем называть фуллеренами математические фуллерены.

Известно [9], что каждый фуллерен имеет ровно 12 пятиугольных граней и p_6 шестиугольных, где p_6 может принимать любое значение, кроме 1.

Все количественные комбинаторные данные фуллерена однозначно выражаются через его число шестиугольных граней p_6 следующимм образом [9]:

$$f_0 = 20 + 2p_6, \ f_1 = 30 + 3p_6, \ f_2 = 12 + p_6.$$

Оказывается, 1-остов любого фуллерена является гамильтоновым графом, т. е. он содержит гамильтонов цикл.

Теорема 21 (F. Kardoš, 2017, [25])**.** *Пусть G является 3-связным планарным кубическим (все вершины имеют степень 3) графом, каждая грань которого является n-угольником, где $n \leqslant 6$. Тогда G является гамильтоновым.*

Следствие 21.1. 1-*остов любого фуллерена содержит гамильтонов цикл.*

Суммируя всё выше сказанное, получаем следующий результат:

Теорема 22. *Каждому фуллерену P с выбранной ориентацией, по группе Хигмана $\mathrm{Hig}_4 = \langle a, b, c, d \mid ...\rangle$ с отмеченной образующей a и по ориентированному гамильтонову пути γ можно канонически сопоставить конечно определённую группу G_P.*

Каждый фуллерен с p_6 шестиугольными гранями обозначается символом $P_{p_6,k}$, где k является номером изомера. Оказывается, число изомеров фуллеренов $P_{p_6,k}$ довольно быстро растёт:

Теорема 23 (W. Thurston, 1998, [41])**.** *Количество комбинаторно неэквивалентных фуллеренов с p_6 шестиугольными гранями имеет рост порядка p_6^9.*

Пример 5. Рассмотрим фуллерен $P_{5,1}$, см. рис. 15. Фундаментальная группа пространства Кана-Тёрстона будет иметь своими образующими a_s, b_s, c_s, d_s ($s = 1, ..., 17$), x_i ($i = 1, ..., 4$), α_j ($j = 1, ..., 4$), β_k ($k = 1, ..., 4$), γ_ℓ ($\ell = 1, ..., 4$). К соотношениям в группах Хигмана мы должны добавить ещё соотношения склейки для каждой грани:

- Первый 5-пояс: $x_1^{-1}\alpha_1 x_2^{-1} = a_1$, $\alpha_{i+1}\alpha_i^{-1} = a_{i+1}$ ($i = 1, 2, 3$), $\alpha_4^{-1} = a_5$
- Второй 5-пояс: $x_2 x_3 \beta_4^{-1} = a_6$, $\beta_{j+1}\beta_j^{-1} = a_{j+6}$ ($j = 1, 2, 3$), $\beta_1 = a_{10}$
- Третий 5-пояс: $\gamma_1 x_4^{-1} x_3^{-1} = a_{11}$, $\gamma_{k+1}\gamma_k^{-1} = a_{k+11}$ ($k = 1, 2, 3$), $\gamma_4^{-1} = a_{15}$

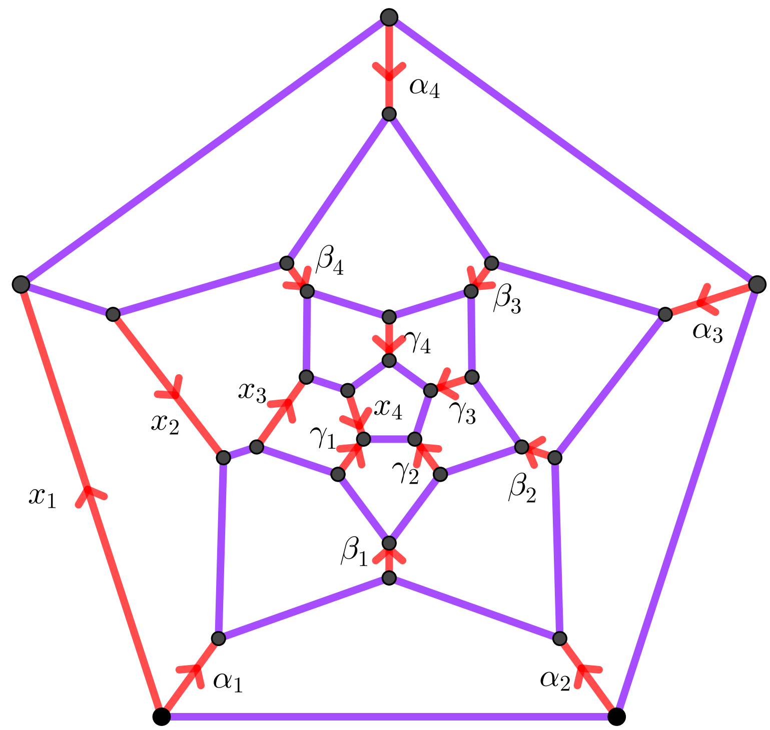


Рис. 15

- Центральная грань: $x_4 = a_{16}$
- Внешняя грань: $x_1 = a_{17}$

Итого, мы имеем $16 + 4 \cdot 17 = 84$ образующих и $4 \cdot 17 + 17 = 85$ соотношений.

Пример 6. Рассмотрим два изомера $P_{4,1}$ и $P_{4,2}$, см. рис. 16. Выпишем для соответствующих групп $\pi_1 TP_{4,1}$ и $\pi_1 TP_{4,2}$ соотношения приклейки цилиндров к граням.

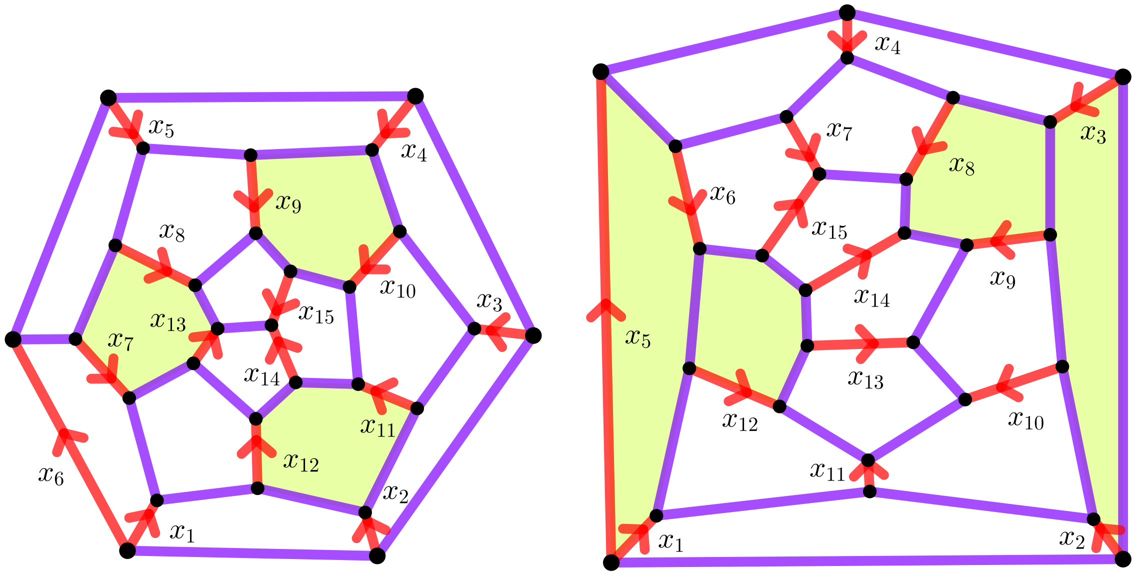


Рис. 16

Шестиугольные грани

- $x_7x_{13}x_8 = a_1$
- $x_9x_{10}^{-1} = a_2$
- $x_{11}x_{12}^{-1} = a_3$
- $x_6 = a_4$

- $x_1x_6^{-1}x_5^{-1} = a_1$
- $x_3x_2^{-1} = a_2$
- $x_8x_9^{-1} = a_3$
- $x_{12} = a_4$

Пятиугольные грани

• $x_1x_7^{-1}x_6^{-1} = a_4$	• $x_6x_{15}x_7^{-1} = a_5$
• $x_2x_1^{-1} = a_6$	• $x_2x_1^{-1} = a_6$
• $x_3x_2^{-1} = a_7$	• $x_4x_3^{-1} = a_7$
• $x_4x_3^{-1} = a_8$	• $x_7x_8^{-1} = a_8$
• $x_5x_4^{-1} = a_9$	• $x_9x_{10}^{-1} = a_9$
• $x_8x_9^{-1} = a_{10}$	• $x_{11}x_{10}^{-1} = a_{10}$
• $x_{10}x_{11}^{-1} = a_{11}$	• $x_{12}x_{11}^{-1} = a_{11}$
• $x_{14}x_{13}^{-1} = a_{12}$	• $x_{13}x_{14}^{-1} = a_{12}$
• $x_{15}x_{14}^{-1} = a_{13}$	• $x_{14}x_{15}^{-1} = a_{13}$
• $x_5^{-1} = a_{14}$	• $x_4^{-1} = a_{14}$
• $x_{12} = a_{15}$	• $x_{13}^{-1} = a_{15}$
• $x_{15}^{-1} = a_{16}$	• $x_5^{-1} = a_{16}$

Вопрос 5. *Изоморфны ли группы $\pi_1 TP_{4,1}$ и $\pi_1 TP_{4,2}$?*

Гипотеза. Фуллерены P_1 и P_2 комбинаторно эквивалентны тогда и только тогда, когда имеется изоморфизм групп $\pi_1 TP_1 \cong \pi_1 TP_2$.

Подтверждение данной гипотезы будет означать, что изомеры фуллеренов $\{P\}$ могут быть классифицированы соответствующими конечно определёнными группами $\{\pi_1 TP\}$ по аналогии с результатом из торической топологии о кольцах когомологий момент-угол многообразий, соответствующих погореловским многогранникам (см. §1). Однако пока автору не удалось найти ответ даже на вопрос 5.

§10 Выводы и заключение

Таким образом, в настоящей работе получены результаты об ацикличных группах и пространствах, упомянутые в §1. Для каждого полиэдрального разбиения P топологического пространства X описана конструкция конечно определённой группы G_P. В случае фуллеренов приведён канонический вариант этой конструкции, который использует при построении гамильтонов путь, ориентацию фуллерена и выбор пунктированной ациклической группы.

В процессе работы были сформулированы вопросы и гипотезы. На часть из этих вопросов были даны исчерпывающие ответы, а с остальными автор связывает свою дальнейшую научную работу.

Список литературы

[1] G. Baumslag, E. Dyer, and A. Heller. The topology of discrete groups. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 16(1):1–47, 1980.

[2] G. Baumslag, E. Dyer, and C.F. Miller. On the integral homology of finitely presented groups. *Topology*, 22(1):27–46, 1983.

[3] A.J. Berrick. The acyclic group dichotomy. *Journal of Algebra*, 326(1):47–58, 2011. Special issue in Memory of Karl Walter Gruenberg.

[4] AJ Berrick and JA Hillman. Perfect and acyclic subgroups of finitely presentable groups. *Journal of The London Mathematical Society-second Series - J LONDON MATH SOC-SECOND SER*, 68, 12 2003.

[5] Artur Bille, Victor Buchstaber, and Evgeny Spodarev. Spectral clustering of combinatorial fullerene isomers based on their facet graph structure. *Journal of Mathematical Chemistry*, 59:1–25, 01 2021.

[6] Aldridge K. Bousfield and Daniel M. Kan. *Homotopy Limits, Completions and Localizations*. Lecture Notes in Mathematics. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1972.

[7] Kenneth S. Brown. *Cohomology of Groups*, volume 87 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer New York, NY, 1982.

[8] V. M. Buchstaber and N. Yu. Erokhovets. Constructions of families of three-dimensional polytopes, characteristic patches of fullerenes, and pogorelov polytopes. *Izv. RAN. Ser. Mat.*, 81(5), 2017.

[9] Victor M Buchstaber and Nikolay Yu Erokhovets. Fullerenes, polytopes and toric topology. In *Combinatorial and Toric Homotopy: Introductory Lectures*, pages 67–178. World Scientific, 2018.

[10] Victor Matveevich Buchstaber and Nikolay Erokhovets. Finite sets of operations sufficient to construct any fullerene from c20. *Structural Chemistry*, 28:225–234, 2016.

[11] Maurice Chiodo and Michael E. Hill. Preserving torsion orders when embedding into groups with ‘small’ finite presentations, 2016.

[12] Tim D. Cochran and Nathan Habegger. On the homotopy theory of simply connected four manifolds. *Topology*, 29(4):419–440, 1990.

[13] Pierre de la Harpe and Dusa McDuff. Acyclic groups of automorphisms. *Commentarii Mathematici Helvetici*, 58(1):48–71, 1983.

[14] Aristide Deleanu. On a theorem of baumslag, dyer and heller linking group theory and topology. *Cahiers de Topologie et Géométrie Différentielle Catégoriques*, 23:231–242, 1982.

[15] E. Dror. Homology spheres. *Israel Journal of Mathematics*, 15(2):115–129, 1973.

[16] Eldon Dyer and A. T. Vasquez. Some small aspherical spaces. *Journal of the Australian Mathematical Society*, 16(3):332–352, 1973.

[17] Paul Goerss and Rick Jardine. *Simplicial homotopy theory*. Birkhäuser Basel, 01 2009.

[18] Allen Hatcher. *Algebraic topology*. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2000.

[19] Jean-Claude Hausmann and Shmuel Weinberger. Caractéristiques d'euler et groupes fondamentaux des variétés de dimension 4. *Commentarii Mathematici Helvetici*, 60:139–144, 1985.

[20] J. Hempel. *3-Manifolds*. AMS Chelsea Publishing Series. AMS Chelsea Pub., American Mathematical Society, 2004.

[21] G. Higman, B. H. Neumann, and H. Neumann. Embedding theorems for groups. *J. London Math. Soc.*, 24:247–254, 1949.

[22] Graham Higman. A finitely generated infinite simple group. *Journal of The London Mathematical Society-second Series*, pages 61–64, 1951.

[23] Graham Higman. Subgroups of finitely presented groups. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*, 262:455 – 475, 1961.

[24] D.M. Kan and W.P. Thurston. Every connected space has the homology of a $k(\pi, 1)$. *Topology*, 15(3):253–258, 1976.

[25] František Kardoš. A computer-assisted proof of barnette-goodey conjecture: Not only fullerene graphs are hamiltonian, 2014.

[26] Michel Kervaire. Les nœuds de dimensions supérieures. *Bulletin de la Société Mathématique de France*, 93:225–271, 1965.

[27] W. Magnus, A. Karrass, and D. Solitar. *Combinatorial Group Theory: Presentations of Groups in Terms of Generators and Relations.* Dover books on mathematics. Dover Publications, 2004.

[28] J. N. Mather. The vanishing of the homology of certain groups of homeomorphisms. *Topology*, 10:197–298, 1971.

[29] C. R. F. Maunder. A Short Proof of a Theorem of Kan and Thurston. *Bulletin of the London Mathematical Society*, 13(4):325–327, 07 1981.

[30] R. James Milgram. The bar construction and abelian H-spaces. *Illinois Journal of Mathematics*, 11(2):242 – 250, 1967.

[31] John Milnor. *Lectures on the H-Cobordism Theorem.* Princeton University Press, 2015.

[32] John W. Milnor. Construction of universal bundles, ii. *Annals of Mathematics*, 63:272, 1956.

[33] Nicolas Monod. Variations on a theme by higman, 2016.

[34] Grisha Perelman. The entropy formula for the ricci flow and its geometric applications, 2002.

[35] H. Poincaré. Analysis situs. *Journal de l'École polytechnique*, 1:1–121, 1895.

[36] Daniel G. Quillen. *Homotopical Algebra.* Lecture Notes in Mathematics. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1967.

[37] A. Scorpan. *The Wild World of 4-Manifolds.* American Mathematical Society, 2005.

[38] G. P. Scott. Compact Submanifolds of 3-Manifolds. *Journal of the London Mathematical Society*, s2-7(2):246–250, 11 1973.

[39] Jean-Pierre Serre. *Trees.* Springer-Verlag, Berlin, 1980. Translated from the French by John Stillwell.

[40] Richard G. Swan. Periodic resolutions for finite groups. *Annals of Mathematics*, 72:267, 1960.

[41] William P. Thurston. Shapes of polyhedra and triangulations of the sphere. *Unpublished*, 1998.

[42] user98602. Homology 4-balls with boundary s^3. Mathematics Stack Exchange. URL:https://math.stackexchange.com/q/1835420 (version: 2019-02-14).

[43] I. A. Volodin, V. E. Kuznetsov, and A. T. Fomenko. *The problem of discriminating algorithmically the standard three-dimensional sphere*, volume 29. Uspekhi Mat. Nauk, 5 edition, 1974.

[44] J. Whitehead. On the asphericity of regions in a 3-sphere. *Fundamenta Mathematicae*, 32(1):149–166, 1939.